ВИСШ ИНСТИТУТ ПО АРХИТЕКТУРА И СТРОИТЕЛСТВО - СОФИЯ

Геодезически факултет - Катедра " Геодезия"

==========

СЪЗДАВАНЕ НА БАЗА ДАННИ ЗА ЦИФРОВ МОДЕЛ НА РЕЛЕФА И НЕЙНОТО ИЗПОЛЗУВАНЕ ЗА АВТОМАТИЗИРАНО ИЗВЛИЧАНЕ НА ПРОФИЛИ

Дисертация за присъждане на научна степен
"Кандидат на техническите науки"

АСПИРАНТ:

Инж. Нгуен Дък Мин

НАУЧНИ РЪКОВОДИТЕЛИ:

Проф. д.т.н. инж. Г.Златанов

Доц. к.т.н. инж. П.Томова

СОФИЯ, 1986 г.

ГЛАВА ПЪРВА

У В О Д

Геодезията е наука за измерването и изобразяването на част от земната повърхност или на цялата земя.

По традиция изобразяването на релефа се извършва върху плана или карта. Всички дейности: изчисление на площи, обеми, проектиране, често се извършва върху плана или картата. Планът или картата се явява важен продукт на геодезическите работи.

С появяването на електронно-изчислителната техника процесът на създаването и обновяването на картата или плана до някаква степен е автоматизиран. Днес, с масовото внедряване в науката и практиката на микрокомпютрите и интерактивните графични системи / ИГС/ възможността за изследване на цифровия модел на релефа / ЦМР/, а така също възможността за неговото приложение в практиката още повече нараства.

Най-напред ще дадем някои определяния, които ще използуваме по-нататък:

Определение 1: Моделиране - своеобразен метод на познанието. . Този метод се отличава от другите по това, че изследваният обект се заменя с негов представител-модел.

Определение 2: Система - множество от взаимно свързани елементи, които в теорията на познанието могат да се разглеждат като отделна единица.

Определение 3: Модел - специфична, качествено своеобразна форма, използувана в теорията на познанието, представяща някаква реално съществуваща или абстрактна система. Моделът отразява обективно същността на изследвания предмет, явление или процес и отчита взаимните връзки между елементите му.

Определение 4: Топографски модел - реален образ на топографията на даден район, създаден от човека или с помощта на средства, създадени от него. Топографския модел в съответствие с целите, за

които е създаден, има различна степен на обобщеност.

Топографският модел бива:

- графически , когато представлява графически образ / карта, план/;
- цифров, когато представлява съвкупност от кодирани и подредени по определени правила цифрови данни;
- аналитичен, когато представлява съвкупност от отделни парчета, описани чрез аналитични изрази от вида $f(x, y, H)$, където x и y и H са координати.

Топографският модел съдържа информации за терена и ситуацията. Поради това често говорим за модел на релефа и модел на ситуацията.

Цифровият модел на релефа фактически се явява дискретно / чрез ограничен брой точки / представяне на релефа. Елементи на цифровия модел на релефа са теренни точки, зададени с трите си координати X, Y и H в някаква предварително дефинирана единна координатна система. Тези точки могат да бъдат разпръстнати / котиран план/ или да бъдат възли на някаква мрежа от правилни фигури / правоъгълници или квадрати, по често квадрати/. И в двата случая - разпръснати точки и подредени точки -цифровия модел трябва да бъде адекватен на целите, за които той е създаден.

Когато ЦМР се изражда от правилни фигури имаме регулярен ЦМР, а когато той се изгражда от неправилни фигури имаме нерегулярен ЦМР.

1.1. Типове ЦМР

Съществуващи методи за изследване на ЦМР могат да се групират в три направления:

- модели, неотчитащи структурата на релефа;
- модели, частично отчитащи структурата на релефа;
- модели, отчитащи структурата на релефа.

1.1.1. Модели, неотчитащи структурата на релефа

Модели от такъв вид често се свързват с регулярна мрежа – мрежа с правилни фигури, най-често от квадрати или равностранни триъгълници. Те се използуват при сравнително равнинен терен, където релефът има плавна форма, или на места, където основно значение има микрорелефът.

В [14] върху територията T се дефинира една план-квадратна мрежа със страна D и линии, успоредни на координатната система.

Равнинните координати се изчисляват по формулите:

$$X_{ij} = X_1 + (i-1)D,$$
$$Y_{ij} = Y_1 + (j-1)D. \qquad / 1.1.1/$$

където X_1 и Y_1 са координатите на югозападната точка на квадратната мрежа, а D е страната на квадрата.

Точки M_1, M_2, M_3 и M_4 съвпадащи с върхове на квадрата, върху която попада дадена точка M се определят като опорни точки. Височината на точка $M_к$ /к = 1,2,3,4/ се определя по формулата:

$$H_{мк} = \frac{[H_{\ell M} P_{\ell M}]}{P_{\ell M}}, \qquad / 1.1.2/$$

където $P_{\ell M}$ е тежестта на височината ℓM и се изчислява по формула

$$P_{\ell M} = \frac{1}{S^2_{\ell M}}. \qquad / 1.1.3/$$

$H_{\ell M}$ е височината на точка ℓM, където ℓM е точка от квадратно локално поле със страна DM, такава, че

$$2S_{ср} \leq DM \leq 4S_{ср}, \qquad / 1.1.4/$$

при $S_{ср.}$ средно разстояние между точките.

Моделната повърхнина се заставя да удовлетворява Лапласовото дефпренциално уравнение

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = 0. \qquad / 1.1.5/$$

Необходимо е за всеки възел от мрежата да бъде изпълнено

условието:

$$H_{ij}^{(k+1)} = \frac{H_{(i+1)j}^{(k)} + H_{(i-1)j}^{(k)} + H_{i(j+1)}^{(k)} + H_{i(j-1)}^{(k)}}{4} \quad / 1.1.6/$$

Ако се използува формула / 1.1.6/, за да се създаде Гаус-Зайделов итерационен процес може да се определят височините на подробните точки от план-квадратна мрежа. Получената повърхнина ще удовлетворява Лапласовото уравнение само за подробните точки.

Други подходи за изграждане на непрекъсната моделна повърхина използуват различни методи на апроксимацията.

В [32] ЦМР се основава на ортогонални полиноми на Чебишев във вида

$$H = \sum_{ij} A_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y) , \quad / 1.1.7/$$

където коефициентите A_{ij} се определят по МНМК по отклоненията от височините на възловите точки от квадратна мрежа/, $\varphi(x)$ и $\psi_j(y)$ - стандартни полиноми на Чебишев, избрани от таблици или изчислени по рекурентна формула

$$\varphi_{i+1} = \varphi_1 \varphi_i - \frac{i^2(k-i)}{4(4i^2-1)} \varphi_{i-1} \quad / 1.1.8/$$

Коефициентите A_{ij} зависят от сложността на релефа и необходимата точност на апроксимация.

Мрежа, която се състои от равностранни триъгълници се разглежда в [31] . При това положение се използува линейна интерполация във вид

$$H = H_1 S_1 + H_2 S_2 + H_3 S_3 , \quad / 1.1.9/$$

или нелинейна интерполация

$$H = A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3 + A_4 H_4 + A_5 H_5 + A_6 H_6 ,$$

където

$$A_1 = S_1 - S_1 S_2 + S_2 S_3 - S_3 S_1 ,$$

$$A_2 = S_2 - S_1 S_2 - S_2 S_3 + S_3 S_1 ,$$

$$A_3 = S_3 + S_1 S_2 - S_2 S_3 - S_3 S_1 ,$$

$$A_4 = S_2 S_3 ,$$

$$A_5 = S_3 S_1 ,$$
$$A_6 = S_1 S_2 ,$$

където: H_i са височини на възловите точки,

S_i – приети координати вътре в триъгълника i /L-координати/

В [34, 35] се описва метод за интерполация на повърхнина от висока степен.

$$Z = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j , \qquad / 1.1.10/$$

като се използува методът на най-малките квадрати.

В този случай тежестта е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието от определена точка до изходните точки l

$$P_{il} = \frac{1}{S_{il}^2} . \qquad / 1.1.11/$$

За повишаване на точността предварително областта се разделя на участъци с единичен релеф.

1.1.2. Модели, частично отчитащи структурата на релефа

Към модели от такъв тип се отнасят регулярни модели с допълнителни информации за структурните линии и модели с изходни точки, разположени на хоризонтали през равни интервали.

В ЧССР [36, 37] типа на релефа се определя в зависимост от r – общия брой локални екстремуми / върхове, дъна/ и орографските линии на релефа, които попадат в 1 ха площ на квадрата. Първият тип се характеризира с $r_1 \leq 10$. Релефът от втория тип се намира в интервал $10 < r_2 < 20$. Третият тип съответствува на релефа, за който $r_3 > 20$.

Апроксимацията на релефа се извърша по отделни области, вътре в които релефът се приема за непрекъснат и гладък. Във всяка област се апроксимира с полином от n степен

$$H = P_n(x, y) = \sum_{r=0}^{n} a_{rs} x^r y^s . \qquad / 1.1.12/$$

Коефициенти a_{rs} се получават чрез решаване на нормална систе-

ма по МНМК, използувайки координати и височини на изходни точки от областта. Броят на изходните точки при това положение трябва да бъде по-голям от K_{min}, който се определя по формулата

$$K_{min} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad / 1.1.13/$$

При $K > K_{min}$ се изчислява средно квадратично отклонение на апроксимацията

$$m_0^2 = \frac{[PVV]}{(K-K_{min})}. \qquad / 1.1.14/$$

При обработка с материали от аерофотоснимки или от съществуващи топографически карти съгласно [37] се извършва по профили. За тази цел се използуват стереометрографи с координметри или координатографи в съчетание с координметри и регистрационни устройства

От карти или планове цифровата информация се отчита чрез дигитайзер "D-mac Cartographic Digitizen".

Апроксимацията се извършва по участъци с използуване на точки, разположени регулярно и на структурни линии Областта на апроксимацията се приема кръгова и удовлетворява условия за непрекъснатост и гладкост. Радиусът на областта на интерполиране е 8 м, 16 м и 25 м съответствуваща на гъстотата на точките за първия, втория и третия тип релефи.

Апроксимационната функция е полином от втора степен. Ако в област на апроксимация бройт точки n е по-голям от осем се използува пълен полином от втора степен:

$$H = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F. \qquad / 1.1.15/$$

При $n<8$ се прилагат следните формули:

$$H = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E, \quad 6 \le n \le 8, \qquad / 1.1.16/$$

$$H = Axy + Bx + Cy, \quad 3 \le n \le 6, \qquad / 1.1.17/$$

$$H = Ax + By + C, \quad n = 3. \qquad / 1.1.18/$$

За височините на изходните точки се приема тежест

$$P_i = 0{,}9\left(1 - \frac{r_i^2}{R^2}\right), \qquad / 1.1.19/$$

където R е радиус на обрастта на интерполиране, съответствуваща на типа на релефа, r_i – разстояние между определена точка и изходна точка.

В ЦНИИГАиК [5] уравнение / 1.1.15/ е съставено за всички изходни точки, разположени на структурни линии и от двете им страни което има следния вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{12}x_1y_1 + a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} - H_1 = v_1 ,$$

. . . . . .

$$a_{11}x_j^2 + a_{22}y_j^2 + a_{12}x_jy_j + a_{13}x_j + a_{23}y_j + a_{33} - H_j = v_j ,$$

$$a'_{11}x_k^2 + a'_{22}y_k^2 + a'_{12}x_ky_k + a'_{13}x_k + a'_{23}y_k + a'_{33} - H_k = v_k ,$$

. . . . . .

$$a'_{11}x_l^2 + a'_{22}y_l^2 + a'_{12}x_ly_l + a'_{13}x_l + a'_{23}y_l + a'_{33} - H_l = v_l , \quad / 1.1.20/$$

$$a_{11}x_s + a_{22}y_s + a_{12}x_sy_s + a_{13}x_s + a_{23}y_s + a_{33} - (a'_{11}x_s +$$

$$+ a'_{22}y_s^2 + a'_{12}x_sy_s + a'_{13}x_s + a'_{23}y_s + a'_{33}) = v_s ,$$

. . . . . .

$$a_{11}x_r^2 + a_{22}y_r^2 + a_{12}x_ry_r + a_{13}x_r + a_{23}y_r + a_{33} -$$

$$-(a'_{11}x_r^2 + a'_{22}y_r^2 + a'_{12}x_ry_r + a'_{13}x_r + a'_{23}y_r) = v_r .$$

Уравненията $/1-j/$ се съставят за точки, разположени от едната страна на структурната линия, уравненията $/k-l/$ – за точки, лежащи на другата страна, а уравненията $/s-r/$ – за точки, принадлежащи на самата структурна линия.

В качеството на изходни точки се използуват характерни точки на релефа. Коефициентите на полинома се определят по точките, които се намират в девет съседни квадрати, а височината на точката се определя само в централния квадрат. Едновременно с решението на система / 1.1.20/ се отчита и положението на структурните линии които са граници на апроксимиращата област. Това води до по-точно

описание на повърхността и отстраняване на прекъснатост в съседни области.

В [38, 39] се предлага апроксимацията на релефа да се извършва по точки, разположени в характерни места на релефа, използувай повърхнина, състояща се от сума на регулярни повърхнини от вида

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j [q(x_j, y_j, x, y)], \qquad /1.1.21/$$

където

$$q(x_j, y_j, x, y) = [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + B]^{1/2}. \qquad /1.1.22/$$

В общия вид /$B \neq 0$/ q представлява хиперболоид с вертикална симетрична ос, минаваща през точка x_j, y_j. В частния случай /$B = 0$/ q е конус с връх в точка j.

1.1.3. Модели, отчитащи структурата на релефа

Към този вид се отнасят структурни модели, а също модели с точки, разположени на хоризонтали в зависимост от кривината на линиите.

В структурните модели точките са разположени на характерни /структурни / линии.

Към структурните модели се отнасят модели, състоящи се от неравностранни триъгълници. Те не само се използуват за инженерно предназначение, но така също и за съставяне на топографски карти.

В система " Топоаналог" [18] се използува структурен модел. Изходните данни в нея са разделени на три масива:

а/ масив на координати на точки от хоризонтали:

$$\begin{aligned} &Z_1; x_{11}, y_{11}; x_{12}, y_{12}; \ldots; x_{1m}, y_{1m}; \\ &Z_2; x_{21}, y_{21}; x_{22}, y_{22}; \ldots; x_{2m}, y_{2m}; \qquad /1.1.23/ \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Z_N; x_{N1}, y_{N1}; x_{N2}, y_{N2}; \ldots; x_{Nl}, y_{Nl}. \end{aligned}$$

б/ масив на коррдинати и височини на точки от орографически линии:

$$x_{11}, y_{11}, Z_{11}; x_{12}, y_{12}, Z_{12}; \dots ; x_{1s}, y_{1s}, Z_{1s};$$
$$x_{21}, y_{21}, Z_{21}; x_{22}, y_{22}, Z_{22}; \dots ; x_{2t}, y_{2t}, Z_{2t}; \quad / 1.1.24/$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{f1}, y_{f1}, Z_{f1}; x_{f2}, y_{f2}, Z_{f2}; \dots ; x_{fn}, y_{fn}, Z_{fn}.$$

в/ масив на координати и височини на екстремните точки на релефа: върхове, котловини и др:

$$x_{11}, y_{11}, Z_{11}; x_{12}, y_{12}, Z_{12}; \dots ; x_{1r}, y_{1r}, Z_{1r}. \quad / 1.1.25/$$

В [4] структурния модел на релефа се апроксимира чрез полином от втора степен:

$$P(x, y) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 x y + a_4 x + a_5 y + a_6 \quad /1.1.26/$$

Територията се разделя на участъци, границите на които са структурни линии и задачата се решава по МНК.

За всеки участък / к/ се съставят уравнения на поправките:

$$a_1^{(k)} x_i^2 + a_2^{(k)} y_i^2 + a_3^{(k)} x_i y_i + a_4^{(k)} x_i + a_5^{(k)} y_i + a_6^{(k)} - \Delta H = v_i,$$
$$i = 1, 2, \dots, l_k; \quad / 1.1.27/$$
$$j = 1, 2, \dots, r;$$

където l_k е броят на изходните точки, попадащи в участъка к, а r е броят на участъците в областта. При граница между съседни участъци l и m се съставят уравненията

$$a_1^{(l)} x_j^2 + a_2^{(l)} y_j^2 + a_3^{(l)} x_j y_j + a_4^{(l)} x_j + a_5^{(l)} y_j + a_6^{(l)} - (a_1^{(m)} x_j^2 +$$
$$+ a_2^{(m)} y_j^2 + a_3^{(m)} x_j y_j + a_4^{(m)} x_j + a_5^{(m)} y_j + a_6^{(m)}) = v_j, \quad / 1.1.28/$$
$$j = 1, 2, \dots, s_{lm};$$

където s_{lm} е броят точки върху структурните линии между участък l, m.

От система / 1.1.27/ и / 1.1.28/ се съставя нормална система, решението на която води до коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_6$ за всеки участък от територията.

1.2. Критически бележки върху съществуващите решения.

Тема на дисертацията

Основни недостатъци на моделите, които не отчитат структурата на релефа са:

- слаба адекватност към релефа;
- голям обем на изходните данни, затова трябва да се използува мощна ЕИМ;
- субективно избиране на стъпката на мрежата и математическите методи при апроксимация на релефа.

Предимствата на тези мозели са:

- има възможност за използуване на математически методи;
- няма сложна логическа връзка между точки;
- има възможност за непосредствено намиране на хоризонталите.

Основните недостатъци на модели, отчитащи частично структурата на релефа са деформацията на морфологията на релефа. Дори ако изходните точки са разположени на структурни и орографични линии на релефа, но вследствие на това, че апроксимацията не се провежда в границите на области, пак се получава деформация. С използуването на застъпване не се отстранява напълно показания недостатък.

Основно предимство на модели, отчитащи структурата на релефа е, че отразяват ясно връзката с характерните точки на релефа. При наличие на масиви с координати по хоризонталите, както това се прав в някои модели, се използува плана или картата за изграждане на модели. При структурните модели е необходима по-сложна логическа връзка между точките, за това количеството информация е по-голямо от това при модели, неотчитащи или частично отчитащи структурата

на релефа.

Макар, че при структурните модели територията се разделя на участъци, все пак участъците не са такива малки, че върху тях винаги де е подходящо да се апроксимира чрез полиноми. При нелинейна апроксимация чрез полиноми, колкото е по-малка областта или е с по-прости релефни форми, апроксимацията е по-точна. Релефът в общия случай представлява сложна повърхнина. Тази повърхнина може да се състои от плавни парчета от подърхнини, които са твърде разнообразни по форма и големина. При горните положения в общия случай релефът трудно се апроксимира точно с полиноми/[13, стр. 200], [3, стр.194]/.

Повърхнина, получена чрез МНК в общия случай няма да минава през изходните точки, въпреки, че те лежат на самата теренна повърхнина.

Методите за интерполиране на линии или повърхнини с полиноми или сплайн-функции / най-често с кубически сплайни/ зависят от конфигурацията на изходните точки. Тези методи са подходящи при хомогенно разположени точки. При заснимане на релеф със сложни, теренни форми, получените точки винаги на неравномерно разположени. При това положение интерполирането с полиноми или със сплайн-функции в много случаи не е подходящо.

Въпросът за прилагане на ЦМР в много страни все още се изследва, а във Виетнам този въпрос прави първите си стъпки.

Изхождайки от горните положения в дисертацията се поставят за решение следните въпроси:

- подходяща структура на ЦМР,
- подходящи начини за интерполиране на ЦМР ,
- да се състави програмна система за създаване на база данни за ЦМР и автоматизирано извличане на профили,
- да се изследва точността на създадения ЦМР и извличания профил.

Г Л А В А В Т О Р А

2.1. Сведения за криви и повърхнини в тримерното пространство

2.1.1. Параметрично описание на криви и повърхнини

В параметричната функция всяка точка на кривата се представя като функция на един или няколко параметри. За крива с един параметър може да се запише следния вид [24, 28]

$$x = x(t),$$
$$y = y(t), \qquad / 2.1.1/$$
$$z = z(t),$$

където t е параметър.

Тогава векторът на положението на точка от кривата се определя във вида

$$P \equiv P(t) = [\, x(t) \quad y(t) \quad z(t) \,]. \qquad / 2.1.2/$$

Компонентите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се разглеждат като декартови координати на вектора P.

За сегмент от кривата често се използува нормиран параметър, за който

$$0 \leq t \leq 1. \qquad / 2.1.3/$$

Аналогично се описва кривата P в двумерното пространство. За разлика от пространствената крива, при кривата в двумерното пространство векторът на положението P се състои от две компоненти.

Аналогично на кривата се описва повърхнина чрез параметрична функция. Тук се използуват два параметъра, например u и v. Тогава повърхнината се описва с векторна функция на два параметъра 24,28

$$P \equiv P(u,v) = [\, x(u,v) \quad y(u,v) \quad z(u,v) \,]. \qquad / 2.1.4/$$

За част от повърхнината често се използуват нормирани параметри, т.е.

$$0 \leq u \leq 1,$$
$$0 \leq v \leq 1. \qquad / 2.1.5/$$

Кривата върху тази повърхнина може да се определи с помощта на фиксиране на u или v . Например, функцията $P(u_i, v)$ представлява крива при $u = u_i = const$, а функцията $P(u, v_i)$ - крива при $v = v_i = const$.

Точка върху повърхнината може да се определи със задаване на значения на два параметъра, т.е. $P(u_i, v_i)$.

Параметричното описание на криви и повърхнини има следното предимство: При получаване на графично изобразяване на крива или повърхнина се изчисляват последователни координати на точки, които съответстват на определени параметри. При транслация и ротация на координатна система не се прави модификация на функцията от използуваните параметри. Това става с помощта на транслация и ротация на векторите, определящи зададената крива или повърхнина.

При сложни криви или повърхнини не е възможно те да се описват чрез елементарни функции. Затова се разделят на части.

2.1.2. Полином на Бернщайн - Безе

В едно доказателство на първата теорема на Вайерщрасе се използува полинома / [21, стр. 19-26]/, предложен от Бернщайн

$$B_n(x) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} , \qquad / 2.1.6/$$

който се нарича полином на Бернщайн.

Полинома $B_n(x)$ е от степен n , неговите коефициенти зависят от $(n+1)$ значение на функцията $f(x)$, изчислени в интервал $0 \le x \le 1$ при $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. От предложеното доказателство следва, че при всяко число $\varepsilon > 0$ може да се намери число N , такова че

$$| f(x) - B_n(x) | < \varepsilon , \qquad 0 \le x \le 1 , \qquad / 2.1.7/$$

за всяко $n > N$, където $f(x)$ е непрекъсната и еднозначно опреде-

лена в интервал $[0,1]$. Ако n се избере достатъчно голямо, то разликата между $f(x)$ и $B_n(x)$ може да се направи по-малка от произволно малкото число ε .

Ако скалара $f(\frac{k}{n})$ се замени с вектора r_k , то при $0 \le x \le 1$ полинома

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} r_k \qquad / 2.1.8/$$

представлява сегмент от крива от степен и се нарича форма на Бернщайн-Безе. Затова сегмента от кривата може да се счита приближение по Бернщайн към многоъгълник, върховете на който са r_k . От това следва, че измененията в положението на върховете води до изменения на кривата по съответен начин.

Скаларните функции

$$\varphi(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} , \quad k=0,1,\dots,n \qquad / 2.1.9/$$

образуват базис на Бернщайн за множеството на всички полиноми от степен n , т.е. всички полиноми от степен n могат да се представлява във вид на линейна комбинация от тези функции.

2.1.3. Крива на Безе

1. Параметричното уравнение на полиномиалната крива на Безе в общия вид е [28]

$$r \equiv r(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} t^i (1-t)^{n-i} r_i , \qquad / 2.1.10/$$

където $r_0, r_1, \dots, r_n$ са радиус-вектори на $n+1$ върха $P_0, P_1, \dots, P_n$ на характерния многоъгълник.

Може да се докаже, че [7]

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 , \\ r(1) &= r_1 , \\ \dot{r}(0) &= n(r_1 - r_0) , \\ \dot{r}(1) &= n(r_n - r_{n-1}) , \end{aligned} \qquad / 2.1.11/$$

и кривата на Безе винаги е разположена във вътрешността на многоъгълника на Безе.

От / 2.1.11/ следва, че полиномиалната крива минава през точки P_0 и P_n и има направления на тангенти по страните P_0P_1 и $P_{n-1}P_n$

2. Кубическа крива на Безе

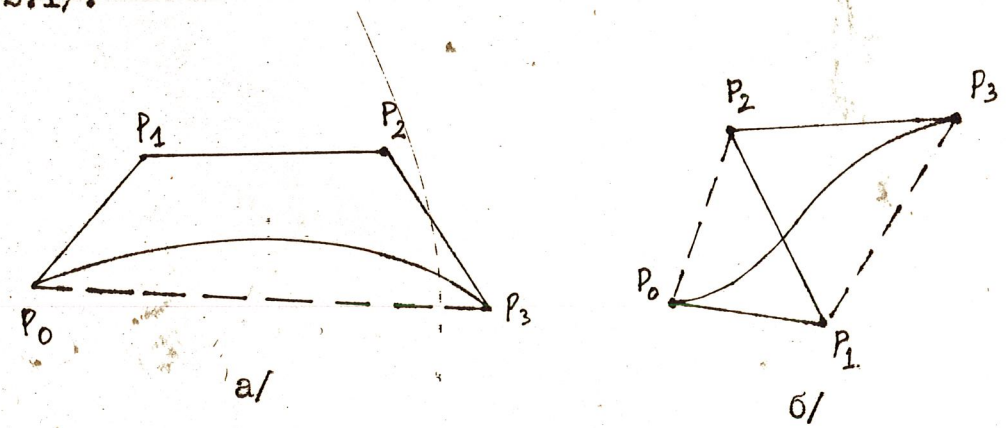
При $n = 3$ се получава кубическата крива на Безе в следния вид:

$$r \equiv \bar{r}(t) = (1-t)^3 r_0 + 3t(1-t)^2 r_1 + 3t^2(1-t) r_2 + t^3 r_3 . \quad / 2.1.12/$$

Въз основа на / 2.1.11/

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 , \\ r(1) &= r_1 , \\ \dot{r}(0) &= 3(r_1 - r_0) , \\ \dot{r}(1) &= 3(r_3 - r_2) , \end{aligned} \qquad / 2.1.13/$$

т.е. кубическата крива на Безе минава през точка P_0 и P_3 и направлението на тангентата в точка P_0 съвпада със страната P_0P_1 , а направлението на тангентата в точка P_3 съвпада със страната P_3P_2 / фиг. 2.1/.



Фиг. 2.1

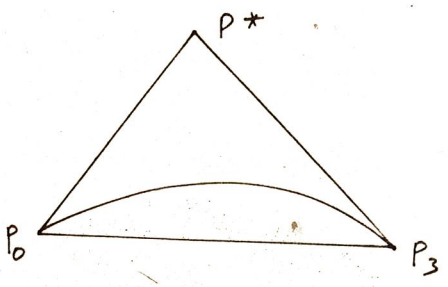
Кубическата крива на Безе винаги е разположена в многоъгълника, състоящ се от точки P_0, P_1, P_2, P_3 / фиг. 2.1/.

Когато върховете на многоъгълника лежат на права, кривата се превръща в права. Например, ако в / 1.1.12/ положим $r_1 = (2r_0 + r_3)/3$ и $r_2 = (r_0 + 2r_3)/3$, то се получава уравнение на права в параметричен вид:

$$r = (1-t)\,r_0 + t\,r_3 \ . \qquad / 2.1.14/$$

Когато тангентите се пресичат в точка P^* / фиг. 2.2/ и ако положим

$$r_1 = (r_0 + 2r^*)/3 \ , \qquad / 2.1.15/$$
$$r_2 = (r_3 + 2r^*)/3 \ ,$$



фиг. 2.2

се получава параболична дъга с крайни точки P_0 и P_3 :

$$r = (1-t)^2 r_0 + 2t(1-t)\,r^* + t^3 r_3 \ . \qquad / 2.1.16/$$

Ако означим [24]

$$J_0 = (1-t)^3 \ ,$$
$$J_1 = 3t(1-t)^2 \ , \qquad / 2.1.17/$$
$$J_2 = 3t^2(1-t) \ ,$$
$$J_3 = t^3 \ ,$$

формула / 2.1.12/ приема следния вид:

$$r = r(t) = r_0 J_0 + r_1 J_1 + r_2 J_2 + r_3 J_3 \ . \qquad / 2.1.18/$$

2.1.4. Елемент от повърхнина на Безе

Уравнението на елемент от повърхнина на Безе оконтурен от четири гранични криви / фиг. 2.3/ има следния вид [24,28]

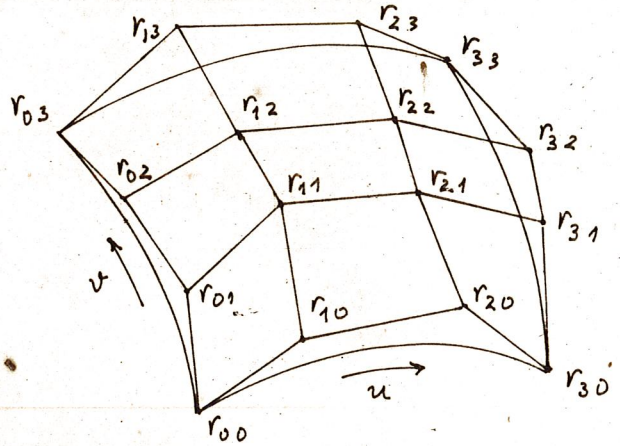
$$r(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} r_{ij}\, g_i(u)\, g_j(v), \qquad /2.1.19/$$

$$0 \le u, v \le 1,$$

където:

$$g_k = \frac{3}{k!(3-k)!}\, t^k (1-t)^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \qquad /2.1.20/$$

функциите g_k са кубически базисни полиноми на Бернщайн, определени въз основа на / 2.1.9/ .



Фиг. 2.3

Граничната линия $r(0,v)$ описва кубическа крива на Безе. Нейният многоъгълник се определя от векторите r_{00}, r_{01}, r_{02} и r_{03}. Три други гранични линии са $r(1,v)$, $r(u,0)$ и $r(u,1)$.

Векторите r_{ij} са върхове на многоъгълник, както е показано на фиг. 2.3. Само върховете r_{00}, r_{03}, r_{30} и r_{33} принадлежат на самата повърхнина.

Точка r_{01} характеризира наклона от първата към втората точка на първия многоъгълник на Безе в направление v. Точките r_{10} r_{20}, r_{31}, r_{32}, r_{23}, r_{13}, r_{02} подобно определят наклоните на съот-

ветните направления в три върха r_{30} , r_{33} , r_{03} . Вътрешните точки r_{11} , r_{21} , r_{22} , r_{13} се използуват, за да дадат векторите на криви на в точки r_{00} , r_{30} , r_{33} и r_{03} съответно.

Както е показано на фиг. 2.3, повърхнината на Безе пълно е определена, ако са известни характерните точки r_{ij} .

В матрична форма елемент от повърхнината на Безе се определя с уравнението

$$r \equiv r(u,v) = (1 \;\; u \;\; u^2 \;\; u^3)\, M\, B\, M^T \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad / 2.1.21/$$

където M и B имат вида:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad / 2.1.22/$$

Значенията на r и неговите производни в точките на елемента от повърхнината се изчисляват по формулите

$$\begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix} =$$

/2.1.23/

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Например, значенията на вектора r и неговите производни във върх с параметри $u = 0$, $v = 0$ се определят по формулите:

$$
\begin{aligned}
r(0,0) &= r_0 \,, \\
r_u(0,0) &= 3(r_{10} - r_{00}) \,, \\
r_v(0,0) &= 3(r_{01} - r_{00}) \,, \\
r_{uv}(0,0) &= 9(r_{00} - r_{01} - r_{10} + r_{11}) \,.
\end{aligned}
\qquad / 2.1.24/
$$

2.1.5. Уравнение на терена повърхнина в околността на зададена точка

В околността на точка $O/x_0, y_0/$ терената повърхнина ще считаме апроксимирана чрез функцията [13]

$$H = f(x, y) \qquad / 2.1.25/$$

при

$$
\begin{aligned}
x &= X - X_0 \,, \\
y &= Y - Y_0 \,.
\end{aligned}
$$

Видът на $f(x,y)$ ще изберем с оглед

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x} &= a_1 + 2a_2 x + cy \,, \\
\frac{\partial H}{\partial y} &= b_1 + 2b_2 y + cx \,,
\end{aligned}
\qquad / 2.1.26/
$$

което означава още

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= 2a_2 \,, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= 2b_2 \,, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &= c \,.
\end{aligned}
\qquad / 2.1.27/
$$

Уравненията / 2.1.26/ и / 2.1.27/ осигуряват гладкост на повърхнината / 2.1.25/.

За тоталния диференциал на H ще имаме

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy \,. \qquad / 2.1.28/$$

След интегрирането на / 2.1.28/, отчитайки / 2.1.26/ получаваме:

$$H = a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 + 2cxy + K, \qquad / 2.1.29/$$

където K е интеграционна константа. Използувайки началните условия

$$H = H_0 \qquad / 2.1.30/$$

при x = y = 0 получаваме $K = H_0$. Следователно, / 2.1.29/, респективно / 2.1.25/ може да се представи във вида:

$$H = H_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 + 2c\,xy \qquad / 2.1.31/$$

формула / 2.1.31/ ни дава конкретния вид на функцията за които / 2.1.20/ са предпоставени.

От / 2.1.31/ веднага се вижда, че при $y = 0$

$$H_x = H_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad / 2.1.32/$$

а при x = 0

$$H_y = H_0 + b_1 y + b_2 y^2. \qquad / 2.1.33/$$

Следователно / 2.1.31/ е уравнение на един параболичен хиперболоид или хиперболичен параболоид.

С оглед на / 2.1.31/ за вектора на направлението на най-големия наклон $\vec{\Gamma} = \mathrm{Grad}\, H$ ще имаме

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j}, \qquad / 2.1.34/$$

където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единичните вектори по осите x и y в координатната система $/0; x, y/$.

От / 2.1.34/ непосредствено намираме за модула / големина/ на $\vec{\Gamma}$:

$$\|\Gamma\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}. \qquad / 2.3.35/$$

Направлението на $\vec{\Gamma}$ се изчислява по формулата

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{b_1}{a_1}. \qquad / 2.1.36/$$

За ъгловия коефициент K_h на хоризонталната тангента h към повърхнина / 2.1.31/ вали

$$K_h = \mathrm{tg}\,w = -\frac{a_1}{b_1}. \qquad / 2.1.37/$$

За уравнението на тангенциалната равнина към терена повърхнина в точка 0 ще имаме

$$\bar{H} = H_0 + a_1 x + b_1 y \,, \qquad /\ 2.1.38/$$

което се проверява чрез валидните за тангенциална равнина равенства:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}\right)_0 \,, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y}\right)_0 \,; \qquad /\ 2.1.39/$$

$$(H)_0 = (\bar{H})_0 = H_0 \,.$$

2.2. Детерминанта и L - координати

Двойната площ на триъгълника $\Delta\,123$ се определя по формулата [14]

$$2P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad /\ 2.2.1/$$

където $/x_1, y_1/$, $/x_2, y_2/$, $/x_3, y_3/$ са координати на върховете на триъгълника.

Ще приемем, че за детерминантата от дясна страна на / 2.2.1/ важи означението $det\,(1,2,3) = det\,(i,j,k)$.

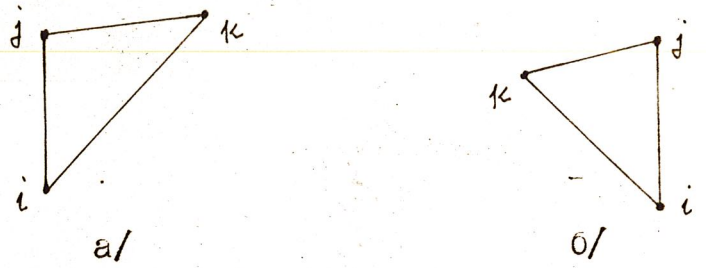
Може да се докаже, че

$$det\,(i,j,k) = det\,(j,k,i) = det\,(k,i,j) = \qquad /\ 2.2.2/$$
$$= -\,det\,(i,k,j) = -\,det\,(k,j,i) = -\,det\,(j,i,k) \,.$$

От формули / 2.2.2/ се вижда, че знакът на площта P зависи от поредността на i,j,k. При подреждане в посока на часовниковата стрелка $P>0$, а при подреждане на точките i,j,k в посока, обратна на часовниковата стрелка $P<0$. За фигурите, дадени на фиг. 2.4 ще имаме:

а/ $det\,(i,j,k) > 0$,

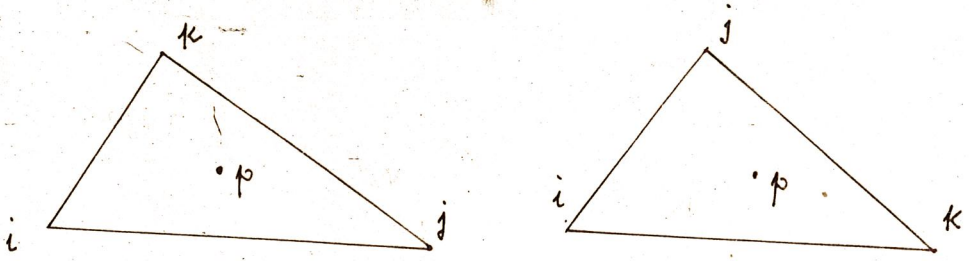
б/ $det\,(i,j,k) < 0$.



Фиг. 2.4

Обратно, ако знаем знака на $det(i,j,k)$ можем да определим точка k от коя страна / в коя полуравнина/ на лъча ij трябва да се намира. Именно това свойство на детерминантата се използува често в дисертацията.

Точката p принадлежи на триъгълника ijk / фиг. 2.5/, ако се изпълняват следните условия:



Фиг. 2.5

При поредност на i,j,k по посока обратна на часовниковата стрелка / фиг. 2.5 а/, точка p трябва да се намира отляво на лъча ij, jk и ki, т.е.

$$\begin{aligned} det(p,i,j) &< 0, \\ det(p,j,k) &< 0, \\ det(p,k,i) &< 0. \end{aligned} \qquad / 2.2.3/$$

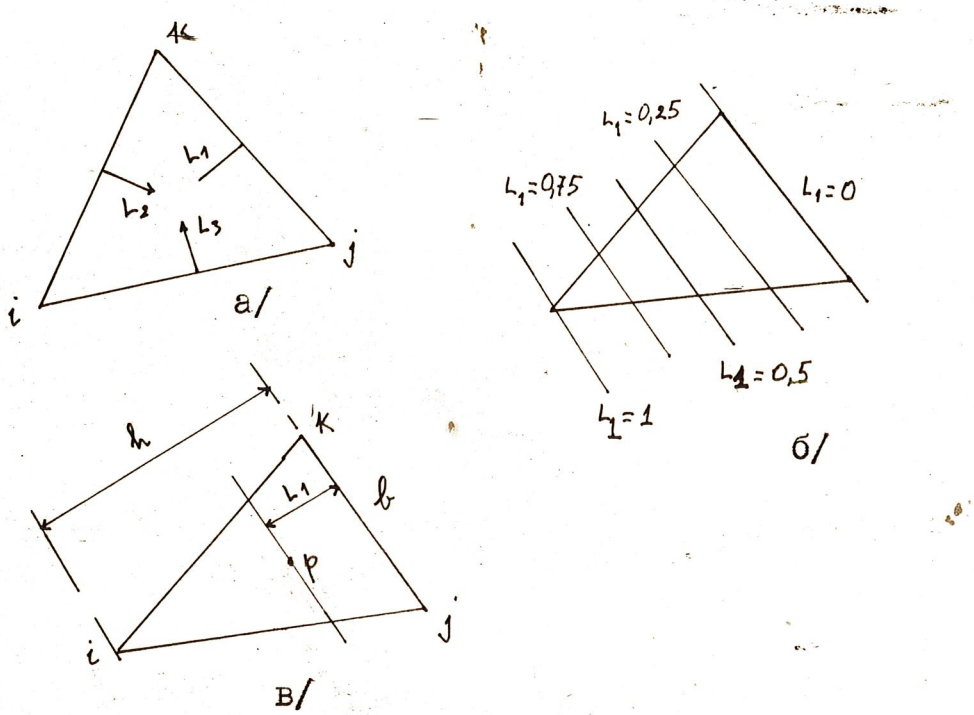
При поредност на i,j,k по посока на часовниковата стрелка / фиг. 2.5.б/ имаме

$$\begin{aligned} det(p,i,j) &> 0, \\ det(p,j,k) &> 0, \\ det(p,k,i) &> 0. \end{aligned} \qquad / 2.2.4/$$

От / 2.2.3/ и / 2.2.4/ винаги са в сила равенствата

$$sign\,[\,det(p,i,j)] = sign\,[\,det(p,j,k)] = sign\,[\,det(p,k,i)].$$ / 2.2.5/

За даден триъгълен елемент много често се използуват координатите L_1, L_2, L_3 [21,25], / фиг. 2.6/

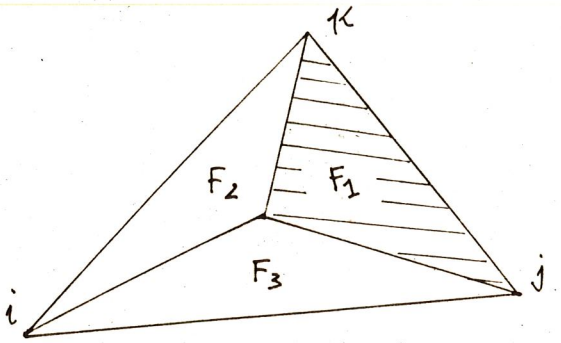


Фиг. 2.6

Всяка координата на дадена точка се представя като отношение между разстоянието от точка до дадена страна и височината h, спусната към същата страна от срещуположния връх.

На фиг. 2.6.в/ са показани линии с $L_1 = const$. Явно е, че $0 \leq L_1 \leq 1$, същото важи и за L_2 и L_3.

Координатите L_1, L_2 и L_3 се наричат L – координати. L – Координатите на точка p представляват отношения на площите на триъгълниците, получени след свързване на точка p с върховете на триъгълника ijk към площта на триъгълника – / фиг. 2.7/.



Фиг. 2.7

От фиг. 2.6.б/ имаме

$$F = \frac{bh}{2}, \qquad F_1 = \frac{bs}{2}. \qquad / 2.2.6/$$

Образуваме отношението

$$\frac{F_1}{F} = \frac{s}{h} = L_1. \qquad / 2.2.7/$$

Тъй като

$$F_1 = \det(p, j, k), \qquad F = \det(i, j, k). \qquad / 2.2.8/$$

От / 2.2.7/ се получава

$$L_1 = \frac{\det(p, j, k)}{\det(i, j, k)}. \qquad / 2.2.9/$$

Аналогично

$$L_2 = \frac{\det(p, k, i)}{\det(i, j, k)},$$

$$L_3 = \frac{\det(p, i, j)}{\det(i, j, k)}. \qquad / 2.2.10/$$

Тъй като $F_1 + F_2 + F_3 = F$, следва, че

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \qquad / 2.2.11/$$

От / 2.2.9/ и / 2.2.10/ може да се запише още

$$0 \leq L_1 \leq 1 ,$$
$$0 \leq L_2 \leq 1 , \qquad / 2.2.12/$$
$$0 \leq L_3 \leq 1 .$$

От фиг. 2.С.в е очевидна връзката

$$L_1 = \begin{cases} 1 & \text{при точка } i , \\ 0 & \text{при точка } j, \text{ и } k . \end{cases} \qquad / 2.1.13/$$

Аналогично и за L_2 и L_3 :

$$L_2 = \begin{cases} 1 & \text{при точка } j , \\ 0 & \text{при точки } i \text{ и } k , \end{cases} \qquad / 2.1.14/$$

$$L_3 = \begin{cases} 1 & \text{при точка } k \\ 0 & \text{при точки } i \text{ и } j . \end{cases} \qquad / 2.1.15/$$

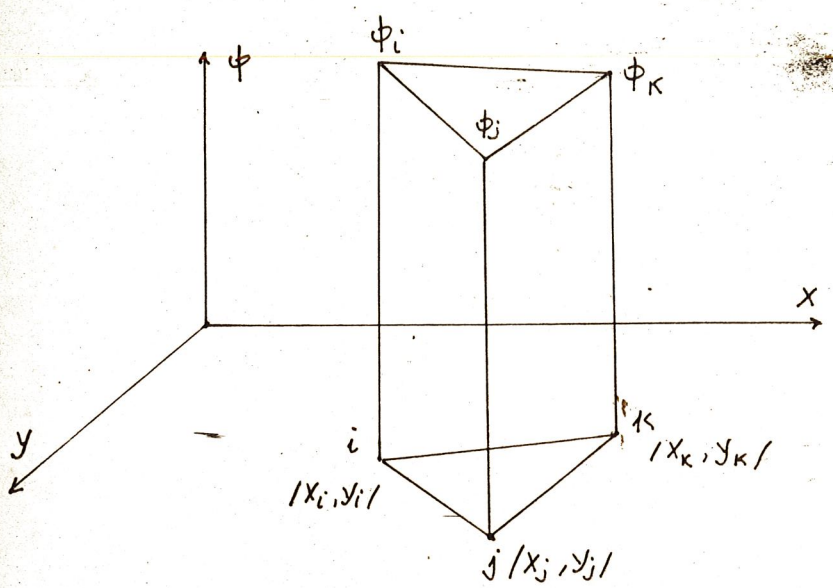
Следователно, L - координатите са нормирани.

Предимството на L-координатите/за триъгълен елемент/ се състо в това, че са удобни при съставянето на функции за формата / базисни функции/ на триъгълните елементи от различна степен и се много удобни при изчисление на интеграли по страните, или площни интеграли [11, 25] .

2.3. Триъгълен елемент, интерполиран чрез равнина

Нека приемем, че възловите точки / върховете / на триъгълните елементи се номерират по посока обратна на часовниковата стрелка. Възловите значения на функцията в φ в точки i, j, k да означим с Φ_i, Φ_j , Φ_k , а координатите на трите възлови точки $/x_i, y_i/$, $/x_j, y_j/$, $/x_k, y_k$

/ фиг. 2.8/



Фиг. 2.8

Интерполационната функция има вида [25]

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y . \qquad / 2.3.1/$$

Във възловите точки се изпълняват следните условия:

$\varphi = \phi_i$ при $x = X_i$, $y = Y_i$,

$\varphi = \phi_j$ при $x = X_j$, $y = Y_j$,

$\varphi = \phi_K$ при $x = X_K$, $y = Y_K$.

Поставяме тези условия в / 2.3.1/ и получаваме следната система уравнения:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i , \\ \phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j , \\ \phi_K &= \alpha_1 + \alpha_2 X_K + \alpha_3 Y_K . \end{aligned} \qquad / 2.3.2/$$

За решението на системата се получава:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A}\left[(X_j Y_K - X_K Y_j)\phi_i + (X_K Y_i - X_i Y_K)\phi_j + \right. \\ &\quad \left. + (X_i Y_j - X_j Y_i)\phi_K \right] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A}\left[(Y_j - Y_K)\phi_i + (Y_K - Y_i)\phi_j + (Y_i - Y_j)\phi_K \right] , \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A}\left[(X_K - X_j)\phi_i + (X_i - X_K)\phi_j + (X_j - X_i)\phi_K \right] \end{aligned} \qquad /2.3.3/$$

където A е площа на триъгълника ijk и има връзка с детерминантата чрез следната формула:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2A \quad . \qquad / 2.3.4/$$

Поставяме значенията α_1 , α_2 и α_3 в / 2.3.1/ и получаваме

$$\varphi = N_1 \Phi_i + N_2 \Phi_j + N_k \Phi_k \quad , \qquad / 2.3.5/$$

където

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_i x + c_i y \right] \quad , \quad \begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \, , \\ b_i = y_j - y_k \, , \\ c_i = x_k - x_j \, , \end{cases} \qquad / 2.3.6/$$

$$N_j = \frac{1}{2A}\left[a_j + b_j x + c_j y \right] \quad , \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - y_k x_i \, , \\ b_j = y_k - y_i \, , \\ c_j = x_i - x_k \, , \end{cases} \qquad / 2.3.7/$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left[a_k + b_k x + c_k y \right] \quad , \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \, , \\ b_k = y_i - y_j \, , \\ c_k = x_j - x_i \, . \end{cases} \qquad / 2.3.8/$$

Изчисляваме значението N_i в точка i :

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y \right) =$$

$$= \frac{1}{2A}\left(x_j y_k - x_k y_j + y_j x_i - y_k x_i + x_k y_i - x_j y_i \right) . \qquad / 2.3.9/$$

Изразът в скобите е точно детерминантата / 2.3.4/, за това

в точка i имаме

$$N_i = \frac{1}{2A}(2A) = 1 . \qquad / 2.3.10/$$

Може да се докаже, че N_i е равно на нула при точка j и точка k, така също и за точки от отсечката ik.

Ако запишем следните зависимости [11] :

$$x = L_1 x_i + L_2 x_j + L_3 x_k ,$$
$$y = L_1 y_i + L_2 y_j + L_3 y_k , \qquad / 2.3.11/$$
$$1 = L_1 + L_2 + L_3 ,$$

където L_1 , L_2 , L_3 са L_i - координатите на точка / x.y/ и решим системата по отношение на L_1 , L_2 и L_3 , то в резултат ще получим съотношения, идентични с / 2.3.6/ и / 2,3.7/ и / 2.3.8/, съответно.

Това означава, че

$$N_i = L_1 , \quad N_j = L_2 , \quad N_k = L_3 . \qquad / 2.3.12/$$

Тогава формула / 2.2.5/ приема вида:

$$\varphi = \Phi_i L_1 + \Phi_j L_2 + \Phi_k L_3 . \qquad / 2.3.13/$$

2.4. Триъгълен елемент, интерполиран с полином от по-висока степен

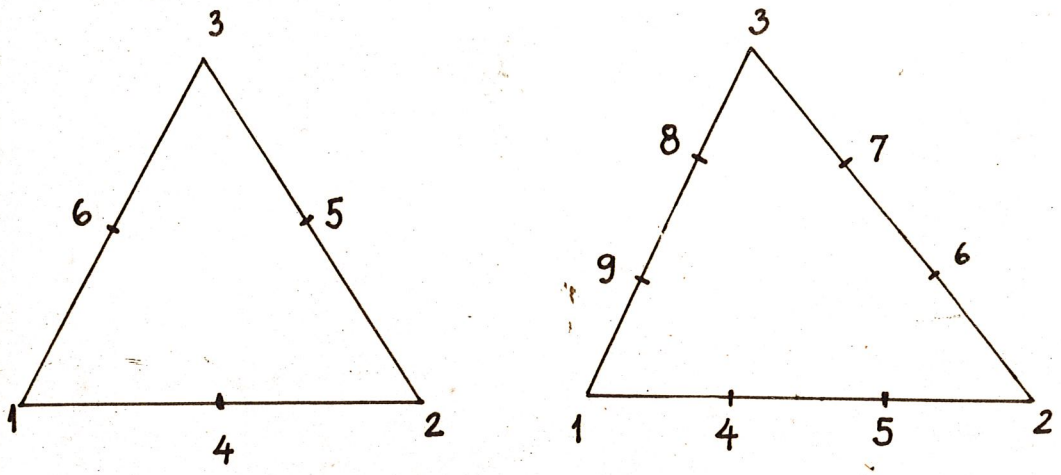
Интерполационният полином от втора степен съдържа шест възлови точки / фиг. 2.9.а/ и има следния вид:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 yx + \alpha_6 y^2 . \qquad / 2.4.1/$$

Полиномът от трета степен / фиг. 2.9.б/ има вида

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 . \qquad / 2.4.2/$$

Величините α_i във формули / 2.4.1/ и / 2.4.2/ могат да се определят по начина, разгледан в точка 2.3. Алгебрическите операции в тези случаи стават по-сложни, съответно броят възлови точки



а/ б/

Фиг. 2.9

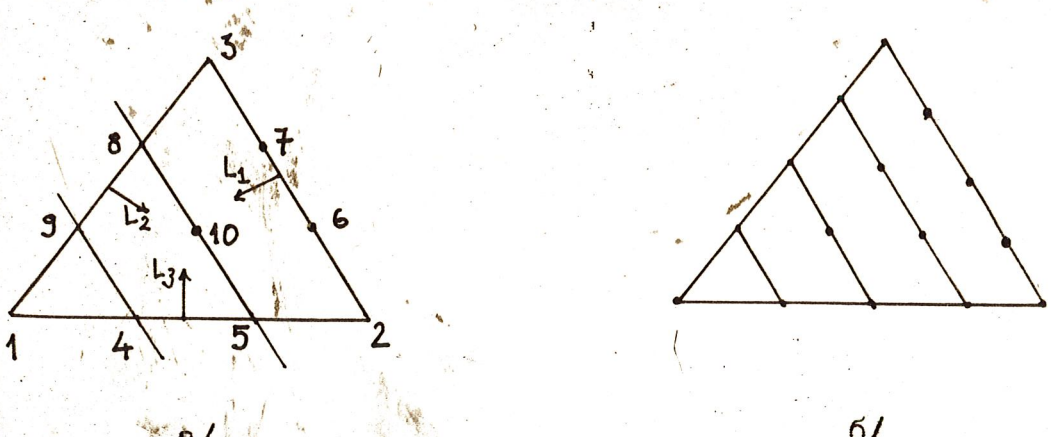
нараства. Използуването на L -координатите опростява определянето на функцията на формата / базисната функция/ на елемента.

Нека интерполационния полином на триъгълния елемент е записан в Лагражов вид:

$$\varphi = \sum_{\beta=1}^{m} N_\beta \, \phi_\beta \qquad / 2.4.3/$$

където ϕ_β са значения на φ във възлови точки, N_β са функции на формата, а m е броят на възловите точки. При полинома от втора степен $m = 6$, а при кубическия $m = 10$.

Определянето на N_β става чрез прекарване на линии, перпендикулярни на L-координатите, всяка от които преминава през няколко възлови точки / фиг. 2.10/.



а/ б/

Фиг. 2.10

Общата формула за пресмятане на функциите на формата има следния вид:

$$N_\beta = \prod_{\delta=0}^{n} \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1,L_2,L_3}} , \qquad / 2.4.4/$$

където n - степен на полинома, а F_δ - функция на L_1, L_2, L_3. Степента n се определя като величина, която е по-малка от броя на възловите точки на страна от триъгълника с единица. Например, на фиг. 2.9.а $n = 3 - 1 = 2$, а на фиг. 2.9.б $n = 4-1 = 3$.

- функциите F_δ се определят от n линии, които минават през всички възлови точки, освен възловата точка, за която искаме да определим функцията на формата.

Ако разгледаме уравнението на правата $L_1 \equiv C \rightarrow F_\delta = L_1 - C$

Знаменателят на /2.4.4/ е значението на F_δ, определено с помощта на координатите на възловата точка β / точка, в която определяме N_β /.

Например, за да определим N_1 за полином от трета степен / фиг. 2.10.а/, постъпваме така [25, 273 стр.]. Направите $L_1 = 0$, $L_1 = 1/3$, $L_1 = 2/3$ лежат всички точки, с изключение на точка 1.

За функциите F имат следния вид

$$F_1 = L_1 - 0 = L_1 ,$$

$$F_2 = L_1 - 1/3 = \frac{3L_1 - 1}{3}$$

$$F_3 = L_1 - 2/3 = \frac{3L_1 - 2}{3}$$

Ако се пресметнат значенията на F_δ в точка 1 /$L_1 = 1, L_2 = L_3 = 0$/ се получава

$$F_1|_{1,0,0} = 1 ,$$

$$F_2|_{1,0,0} = \frac{3.1 - 1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$F_3|_{1,0,0} = \frac{1}{3}$$

След заместване на тези величини в / 2.4.4/ се определя

$$N_1 = \prod_{\delta=0}^{3} \frac{F_\delta}{F_\delta|_{1,0,0}} = \frac{L_1}{1} \left(\frac{3L_1 - 1}{3}\right) \frac{3}{2} \left(\frac{3L_1 - 2}{3}\right) \frac{3}{1} ,$$

или

По аналогичен начин се определя всяко N_β . В резултат имаме:

– За интерполационния полином от втора степен

$$\varphi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + \ldots + N_6 \phi_6 , \qquad / 2.4.5/$$

където

$$N_1 = L_1 (2L_1 - 1)$$

/ N_2 , N_3 – аналогично /

$$N_4 = 4 L_1 L_2$$

/ N_5 , N_6 – аналогично/

– За интерполационния полином от трета степен

$$\varphi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + \ldots + N_{10} \phi_{10} , \qquad / 2.4.6/$$

където

$$N_1 = 0,5 L_1 (3L_1 - 1)(3L_1 - 2),$$

/ N_2, N_3 – аналогично/ ,

$$N_4 = 4,5 L_1 L_2 (3L_1 - 1),$$

$$N_5 = 4,5 L_1 L_2 (3L_2 - 1),$$

/ $N_6, \ldots, N_9$ – аналогично/

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 .$$

Десетият параметър може да бъде изключен с помощта на линейното съотношение / [20, стр. 76] /

$$\phi_{10} = \frac{1}{4} \sum_{j=4}^{9} \phi_j - \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{3} \phi_j \qquad / 2.4.7/$$

и / 2.4.6/ се получава в следния вид

$$\varphi = \sum_{j=1}^{9} \phi_j \bar{N}_j \qquad / 2.4.8/$$

където

$$\bar{N}_j = N_j + \alpha_j N_{10} ,$$

$$\alpha_j = \begin{cases} -\frac{1}{6} & (j = 1, 2, 3), \\ \frac{1}{4} & (j = 4, 5, \ldots, 9). \end{cases} \qquad / 2.4.9/$$

2.5. Ермитова интерполация на триъгълни елементи

Кубическият полином има десет коефициента, които се определят по значенията на функцията и нейните производни във върховете и по значението на функцията в центъра на тежест на триъгълника. В този случай Ермитовата интерполационна формула /[20, стр.81]/ има следния вид:

$$G(x,y) = \sum_{j=1}^{4} U_j\, q_j^{(3)}(x,y) + \sum_{j=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_j r_j^{(3)}(x,y) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_j s^{(3)}(x,y), \right. \qquad / 2.5.1/$$

където

$$U_j = (G(x,y))_j$$

$$q_j^{(3)}(x,y) = L_j (3L_j - 2L_j^2 - 7L_K L_\ell),$$

$$q_4^{(3)}(x,y) = 27\, L_1 L_2 L_3,$$

$$r_j^{(3)}(x,y) = L_j [(x_K - x_j) L_K (L_\ell - L_j) + (x_\ell - x_j) L_\ell (L_K - L_j)], \qquad / 2.5.2/$$

$$s_j^{(3)}(x,y) = L_j [(y_K - y_j)] L_K (L_\ell - L_j) + (y_\ell - y_j) L_\ell (L_K - L_j)],$$

(i,j,k) - циклическо заместване на индексите 1,2,3.

Ако положим във формула / 2.5.1/

$$U_4 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} U_j + \frac{1}{18} \sum^{(1)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_j (\xi_{Kj} + \xi_{\ell j}) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_j (\eta_{Kj} + \eta_{\ell j}) \right], \qquad / 2.5.3/$$

където $\sum^{(1)}$ означава сумиране по (i,j,k) за всички циклически замени от / 1,2,3/, интерполационната функция приема вида:

$$G^*(x,y) = \sum_{j=1}^{3} \left[U_j\, q_j^{(3)*}(x,y) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_j r_j^{(3)*}(x,y) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_j s_j^{(3)*}(x,y), \right. \qquad / 2.5.4/$$

където

$$q_j^{(3)*}(x,y) = L_j\,(3L_j - 3L_j^2 + 2L_k L_\ell),$$

$$r_j^{(3)*}(x,y) = L_j^2\,(L_\ell\,\xi_{ij} + L_k\,\xi_{kj}) + \frac{1}{2}\,L_1 L_2 L_3\,(\xi_{\ell j} + \xi_{kj}),$$

$$s_j^{(3)*}(x,y) = L_j^2\,(L_\ell\,\eta_{ij} + L_k\,\eta_{kj}) + \frac{1}{2}\,L_1 L_2 L_3\,(\eta_{\ell j} + \eta_{kj}), \qquad /2.5.5/$$

$$\xi_{mn} = x_n - x_m,$$

$$\eta_{mn} = y_n - y_m,$$

$$(m,n) \in \{i,j,k\}.$$

Г Л А В А Т Р Е Т А

3.1. Цифров модел на релефа - концепция

С помощта на ЦМР могат да се решат следните задачи:

- отчитане на височина на точка при зададени равнинни координати и извличане на профили по дадено трасе или мрежа от линии;

- извличане на информация за автоматизирано изчертаване на хоризонталите при даден мащаб и дадено сечение;

- определяне на посоката на най-големия и нулевия наклон на терената повърхност в дадена точка и др.

За да се решат изброените задачи е удобно и целесъобразно да се образува база данни за ЦМР.

Тези данни се получават от:

- геодезически измервания - полярни снимки;

- дигитализиране - отчитане на хоризонтални координати и техните височини от топографска карта или план;

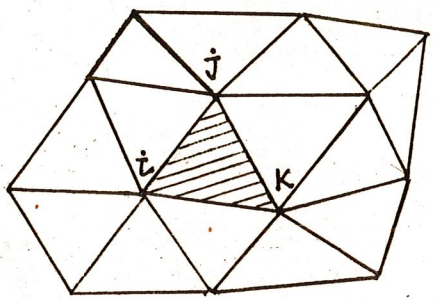
- чрез фотограметрични измервания.

Координатите X,Y, H на изходните точки накоито се определят по горните начини се наричат дадени точки.

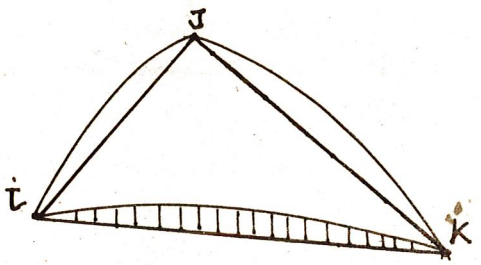
Заснемането на релеф се извършва по инструкции със съответна точност на изобразяване на релефа. Поради разнообразната форма на релефа, получените точки в общия случай са разпръснати и неравномерно разположени. Средното разстояние между точките в една област не е едно и също за друга област от даден обект. При това положение цялата повърхност на релефа е трудно да се апроксимира чрез елементарни функции [3, 14] . За да се създаде ЦМР, цялата област се разделя на ограничен брой малки фигури. Решаването на задачата се свежда до разлагане на областта на отделни фигури. Такъв начин често се прилага при метода на крайните елементи.

Мрежата от правилни фигури - квадрати със страна средното разстояние между точките трудно може да обхване релефните форми, а всяко намаляване на страните води до съществено увеличаване на информацията на ЦМР. Нерегулярен ЦМР, съставен чрез мрежа от триъгълници създава условия за пълно описание на релефните форми при относително малък обем информация. Мрежата от непокриващи се триъгълници трябва да се построи така, че страните ѝ да следват структурните линии на релефа.

Чрез триъгълни елементи се покрива терената повърхнина, като всеки елемент е заграден между три вертикални равнини, минаващи през трите страни на триъгълника / фиг. 3.2/ от триъгълната мрежа /фиг.3.1/.



фиг. 3.1



фиг. 3.2

Пресечниците между вертикалните равнини и терената повърхнина се определят трите му гранични линии. Два съседни триъгълни елементи имат една обща терена гранична линия. За всеки триъгълен елемент се построява апроксимационна функция H / x,y/. Релефната форма във вътрешността на триъгълния елемент не е сложна. Затова е достатъчно да се апроксимира чрез примерно полином от втора степен. Апроксимационната функция H /x,y/ на триъгълния елемент се построява въз основа на стойностите в трите върха и трите гранични линии. Изходните точки, от които излизат страни на триъгълниците наричаме още възлови точки.

Върховете на триъгълниците са разположени на характерни места. От изискването, че страните на триъгълниците трябва да следват те-

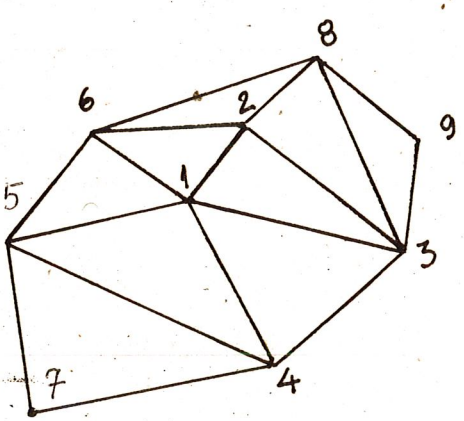
рена следва, че някои от граничните терени линии се явяват и скелетни линии.

При това положение радиусите на кривина на граничните линии са големи. Следователно, граничните линии могат да се приемат като прави отсечки или криви, които са близки до хордите.

Ако граничните линии се приемат като прави отсечки, получената повърхнина се състои от равнинни триъгълници, за които се прилага линейна интерполация. Ако граничните линии се приемат като криви, получена повърхнина се състои от нелинейни триъгълни елементи, за които се прилага нелинейна интерполация.

Ако при всяка дадена точка е известна тангенциалната равнина към терената повърхнина следва, че всички гранични линии излизащи от тази точка, трябва да приемат равнината като допирателна. Следователно апроксимиращата повърхнина е гладка във възловите точки.

Уравнението на терената повърхнина в околността на всяка точка ще се построи по начина, описан в точка 2.1.5. Тук обаче се използуват само околните точки. Околните точки са тези, които с възловата точка образуват страни на триъгълници / фиг. 3.3/.

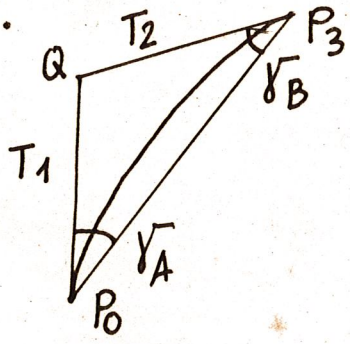


/ фиг. 3.3/

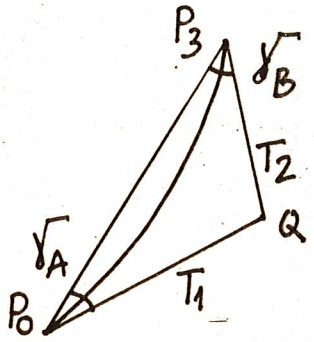
На фиг. 3.3 околните точки на точка 1 са 2,3,4,5,6. Точки 7, 8,9 не са околни точки, за точка 1.

Нека две възлови точки P_0 и P_3 са два върха на някой триъгъл-

ник, следователно отсечката P_0P_3 е страна на триъгълника. Пресечницата на тангенциалната равнина в точка P_0 и вертикалната равнина, минаваща през P_0P_3 да означим с T_1, а пресечницата между тангенциалната равнина в точка P_3 и вертикалната равнина да означим с T_2. Пресечницата между терена̀та повърхнина и вертикалната равнина е именно терена̀ гранична линия при страната P_0P_3 на този триъгълник / ф. 3.2/, а T_1 и T_2 са тангенти към кривата в точка P_0 и P_3 съответно / фиг. 3.4/.

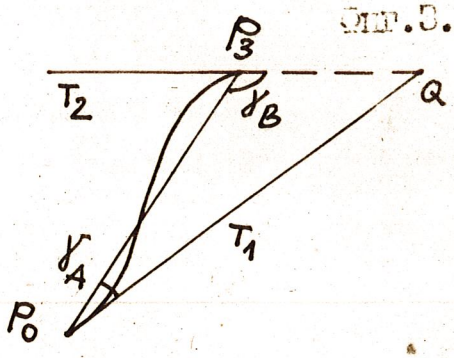


а/

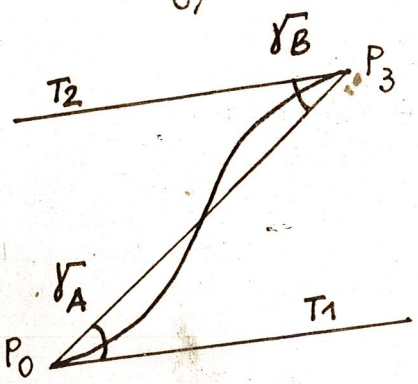


б/

Фиг.3.4



в/



г/

Фиг. 3.4

Имаме следните случаи:

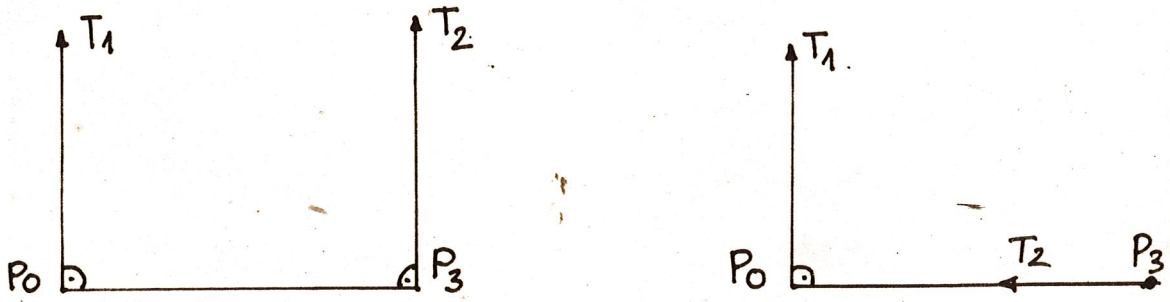
1. Тангентите T_1 и T_2 съвпадат с P_0P_3, когато релефът в околността на страна P_0P_3 е равнинен.

2. T_1 и T_2 се пресичат в точка Q и образуват триъгълник QP_0P_3, в който γ_A и γ_B / $\gamma_A, \gamma_B < \frac{\pi}{2}$ / са ъгли при точки P_0 и P_3 съответно / фиг. 3.4.а,б/.

3. T_1 и T_2 се пресичат в точка Q, но поне един от ъглите γ_A или γ_B е по-голям от $\pi/2$ / фиг. 3.4.в/ или T_1 и T_2 могат

да бъдат успоредни, т.е. се пресичат в безкрайността / фиг. 3.4./

4. T_1 и T_2 са едновременно перпендикулярни на P_0P_3 или една от тях е перпендикулярна с P_0P_3 , а другата съвпада с P_0P_3 / фиг. 3.5/



Фиг. 3.5

Понеже заснимането на релефа се извършва на характерни места и страните на триъгълниците приблизително следват терена, затова четвъртия случай е практически невъзможен.

На фиг. 3.4 е показана теренната линия между P_0P_3 , при която точка P_3 е с по-голяма височина от точка P_0 , т.е. $H_{P_0} < H_{P_3}$. Аналогично е и при $H_{P_0} > H_{P_3}$.

Както бе казано, заснимането / за да се достигне необходимата точност на изобразяване на релефа/ се извършва по дадена инструкция. Това води до ограничаване на максималното отклонение между хордата и теренната линия.

$$f_{max} \leq D_{gon.} \qquad /3.1.1./$$

където $D_{gon.}$ е взето от съответната инструкция или може да бъде определена от нас, а f_{max} е максималното отклонение между хордата и дъгата.

Теренната линия между точки P_0 и P_3 може да се опише чрез сегмент от параметрична кубическа крива $P(t)$, където параметъра t се взема в интервала $[0,1]$. При апроксимацията на теренната линия се избира тази кубическа крива, която отговаря на следните изисквания:

- максималното разстояние между кривата и хордата да удовлетворява условие / 3.1.1/;
- кривата да минава през точка P_0 и P_3 , а T_1 и T_2 да са тангенти към кривата в точката P_0 , съответно в точка P_3 / фиг. 3.4/

Това означава, че

$$P(0) = P_0 \quad , \quad P(1) = P_1 \quad , \qquad / 3.1.2/$$
$$P'(0) = P_0' \quad , \quad P'(1) = P_3' \quad .$$

Ако не се вземе предвид условието / 3.1.1/ и кубическата крива се построи съобразно условие / 3.1.2/, ще се получи следното:

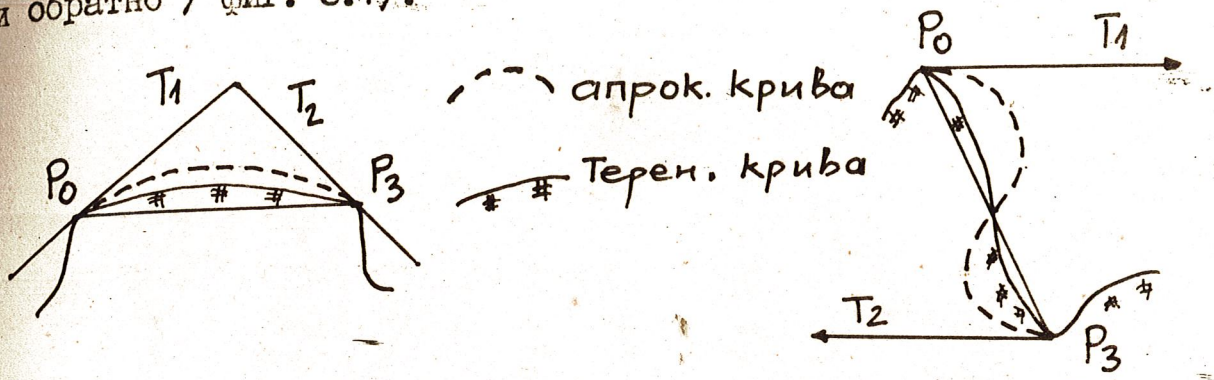
- апроксимацията на теренната повърхнина в околността на точка P_0 съответно на P_3 не е точна. Това идва като следствие от ограничения брой на околните точки за P_0 / съответно P_3 / и от конфигурацията на околните точки и ще доведе до неточно определяне на тангенциалната равнина в точка P_0 / съответно в P_3 /, а от там тангентите T_1 / съответно T_2 / няма да съвпадат с тези на теренната повърхнина в точка P_0 / съответно P_3 /.

- от друга страна, ако тангентите T_1 и T_2 съвпадат с тези на теренната повърхнина, при големи ъгли γ_A и γ_B при P_0 и P_3 апроксимацата крива може да се различава много от действителната теренна крива / фиг. 3.6/ . Такива случаи често се срещат в практиката.

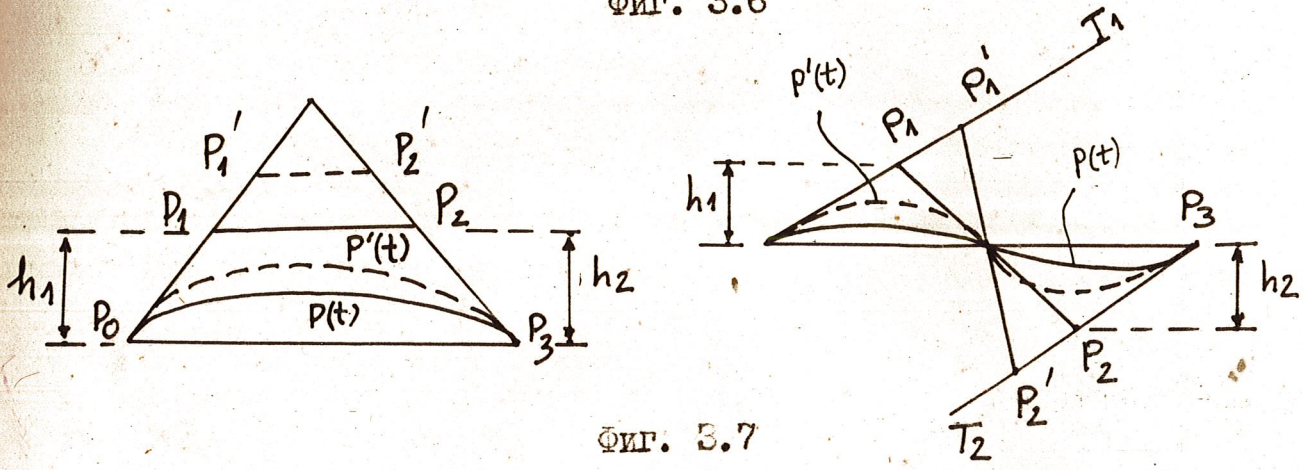
Кривата, която едновременно удовлетворява условия / 3.1.1/ и / 3.1.2/ може да се избере от семейството кубически криви на Безе / точка 2.1.3/. Тази крива се нарича проста линейна крива на Безе и се дефинира по следния начин:

Върху тангентата T_1 се определя точка P_1, а на тангента T_2 се определя точка P_2 , така, че перпендикулярите h_1 и h_2 спуснати от точки P_1 и P_2 към правата P_0P_3 винаги да са равни помежду си / фиг. 3.7/. Многоъгълникът $P_0P_1P_2P_3$ дефинира крива на Безе. Ако

точка P_1 и P_2 линейно се отдалечават от точки P_0 и P_3 съответно, то максималното отклонение между хордата P_0P_3 и кривата се увеличава и обратно / фиг. 3.7/.



Фиг. 3.6



Фиг. 3.7

В точка 3.3 ще покажем начин за определяне на апроксимационната крива на теренната линия от този вид.

3.2. Структура на базата данни за ЦМР

По същество ЦМР е цифрово представяне на терена. Той може да се съхранява на трайни носители за информация и може да се използува така, както и картата. За целта е необходимо да се създаде една информационна банка, в която цифровите информации за терена са подредени в правилни фигури с оптимални размери, покриващи определена територия. Ако територията е голяма, е подходящо ЦМР да се раздели на отделни участъци по подобие и аналогично на разграфката на картните листове. Най-малката територия/ площ/, която ще се яви основна единица за общия ЦМР обезателно трябва да бъде правилна фигура, размерите на която зависят изключително от материално техническо-

то осигуряване, носителя на информации и задачите, които ще се решават върху ЦТР. Всяка основна единица трябва да съдържа информационни елементи, които позволяват да се опише терена и да се решат различни задачи на проектирането.

Ще приемем, че цялата територия е раздробена на квадрати / правоъгълници/, наречени основни. Всеки основен квадрат / правоъгълник/ се покрива от по-голям квадрат / правоъгълник/, който се нарича блок. Във всеки блок се съдържат непокриващи се триъгълници така, че основният квадрат / правоъгълник/ да се покрие изцяло от непокриващите се триъгълници.

Нека територия А на даден обект е съставен от подобласти $A_1, A_2, \ldots, A_M$, които имат относителна гъстота на точките. Нека е известно множеството от изходните точки $\{B_i / x_i, y_i, H_i /, i = \overline{1,n}\}$.

Да означим с $S_1, S_2, \ldots, S_M$ – средните разстояния на точките в подобластите. Нека

$$S_K = min\ (S_1, S_2, \ldots, S_M), \qquad / 3.2.1/$$

$$DS = max\ (S_1, S_2, \ldots, S_M), \qquad / 3.2.2/$$

$$X_{min} = min\ (X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad / 3.2.3/$$

$$Y_{min} = min\ (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n). \qquad / 3.2.4/$$

Върху А да си представим квадратна мрежа / фиг. 3.8/ дефинирана по следния начин:

– страната на квадрата, която се нарича основна се определя така, че максималния брой N_{max} на точките в квадратите да е ограничен

$$N_{max} \leq N_0, \qquad / 3.2.5/$$

където N_0 се определя в зависимостта на капацитета на ЕИМ / микрокомпютъра/, с който се работи;

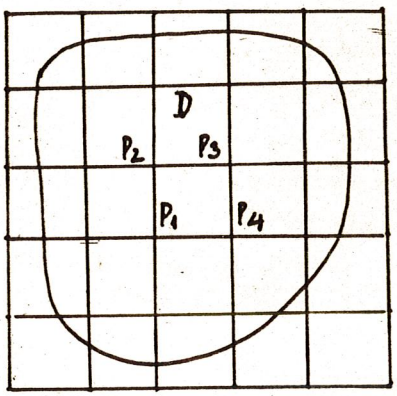
– югозападната точка на мрежата да бъде начало на координатната система $O/X_0, Y_0/$, където X_0, Y_0 се определят по формулите:

$$X_0 = [X_{min} // D]\, D\ ;\ Y_0 = [Y_{min} // D]\, D, \qquad / 3.2.6/$$

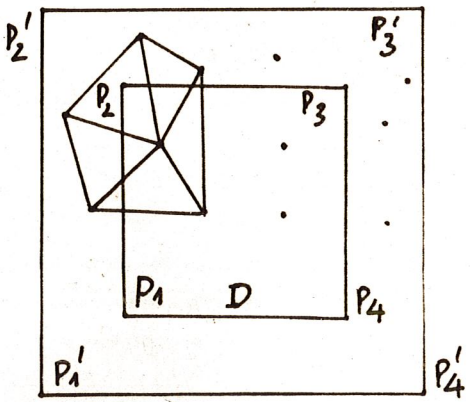
където знака // означава целочислено деление, а X_{min} и Y_{min} се определят по / 3.2.3/ и / 3.2.4/ съответно.

В зависимост от броя на дадените точки , един обект може да има един или няколко блока.

Между блоковете има застъпване с ширина $2DS$, необходимо, за да се покрие квадрата $P_1P_2P_3P_4$ изцяло с триъгълници. Следователно, блокът $P_1'P_2'P_3'P_4'$ съдържа освен точките / триъгълниците/ в квадрата $P_1P_2P_3P_4$, но и точките / триъгълниците/ вън от квадрата в зоната на застъпването / фиг. 3.9/.



Фиг. 3.8



Фиг. 3.9

Като параметри за блока $P_1'P_2'P_3'P_4'$ ще се използват координатите на югозападната точка $P_\ell / X_\ell, Y_\ell /$ на основния квадрат $P_1P_2P_3P_4$.

Точка m със зададени равнинни координати $/X_m, Y_m/$, се намира в блока ℓ , ако

$$X_\ell = [X_m // D]\,D \quad , \quad Y_\ell = [Y_m // D]\,D \qquad / 3.2.7/$$

и принадлежи на триъгълник ijk от блока ℓ , ако

$$sign\,[det(m,i,j)] = sign\,[det(m,j,k)] = sign\,[det(m,k,i)] \qquad / 3.2.8/$$

Блокът представлява основна единица на базата данни, а триъгълния елемент се явява най-ниския информационен елемент.

Например, ако квадратната мрежа е със страни D = 1000 м, ако X_{min} = 3250,71; Y_{min} = 2180,56 ; тогава координатите на първото начало на мрежата ще бъдат

$$X_o = [\,3250,71 // 1000\,]\,1000 = 3000 \text{ м},$$
$$Y_o = [\,2180,56 // 1000\,]\,1000 = 2000 \text{ м}.$$

Точка m с координати /7560,82; 5810,64 / е от блок ℓ , на който координатите на югозападната точка P_ℓ на основния квадрат са

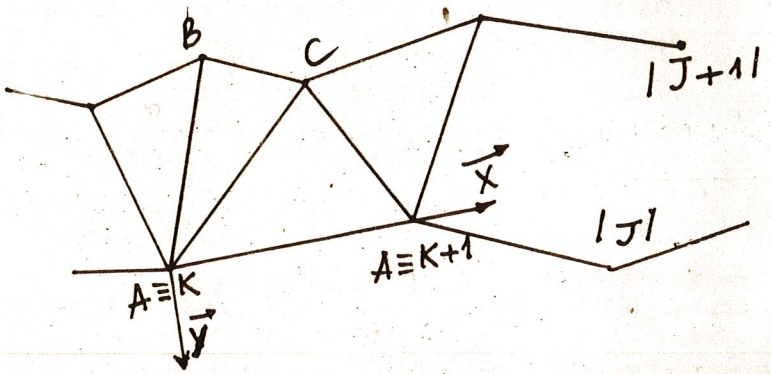
$$x_\ell = [7560,82 \;//\; 1000\;]\; 1000 = 7000,$$
$$y_\ell = [5810,64 \;//\; 1000\;]\; 1000 = 5000.$$

3.3. Начин за построяване на мрежа от непокриващи се триъгълници

Да решим следната задача:

В област са дадени P непресичащи се профили, състоящи се от дискретни точки. Да се построи мрежа от непокриващи се триъгълници с върхове-точки от съседни профили.

Нека приемем, че между профил j и профил $j+1$ /$j=1,2,\ldots,P-1$/ не съществува друг профил. Нека профил j се състои от N_j точки, а профил $j+1$ – от N_{j+1} точки. Нека К е поредна точка на профил j /фиг. 3.10/.



Фиг. 3.10

Процесът на изграждане на ивица от непркриващи се триъгълници между профил j и профил $j+1$ е както следва:

1. Подготвителна стъпка: Нека точка А е първа точка на профил j , а точка В е първа точка на профил $j+1$. Точка А и В са два върха на първия триъгълник от ивицата.

2. Изпълнителна стъпка: Ще определим точка С от профил j или $j+1$, така, че с А и В да образуват триъгълника АВС. Ако С е точка от профил $j+1$ полагаме К ≡ А , ако С е точкаот профил j , тогава С ≡ К . Точка С се определя по следния начин:

Извършва се транслация и ротация на координатна система в ново начало-точка К така, че абсцисната ос се определя от точка К

и следващата точка от профил j - /К+1/.

Ъгълът на ротация се изчислява по формулата

$$\alpha = arctg \frac{y_{K+1} - y_K}{x_{K+1} - x_K} \quad . \qquad / 3.3.1/$$

Равнинните координати на точките от профили j и $j+1$ се трансформират в новата координатна система по формулите:

$$\bar{x}_i = \cos\alpha (x_i - x_K) + \sin\alpha (y_i - y_K),$$
$$\bar{y}_i = -\sin\alpha (x_i - x_K) + \cos\alpha (y_i - y_K), \qquad / 3.3.2/$$
$$i = 1, 2, \ldots, N_j + N_{j+1} .$$

Създава се локално поле, в което влизат точки $\bar{x}_i \leq \bar{x}_{K+1}$ от профили j и $j+1$. Точки, които вече участвуват в списъка от построените триъгълници не участвуват в локално поле. Точка, за която се удовлетворява условието:

$$X = \min \{ \bar{x}_i \}, \; i = 1, 2, \ldots, N_j + N_{j+1} \qquad / 3.2.3/$$

е търсената точка С.

Ако точка С съвпада с последната точка на профил j или $j+1$ процесът за построяване на непокриващи се триъгълници с върхове-точки от профил j и профил $j+1$ е завършен.

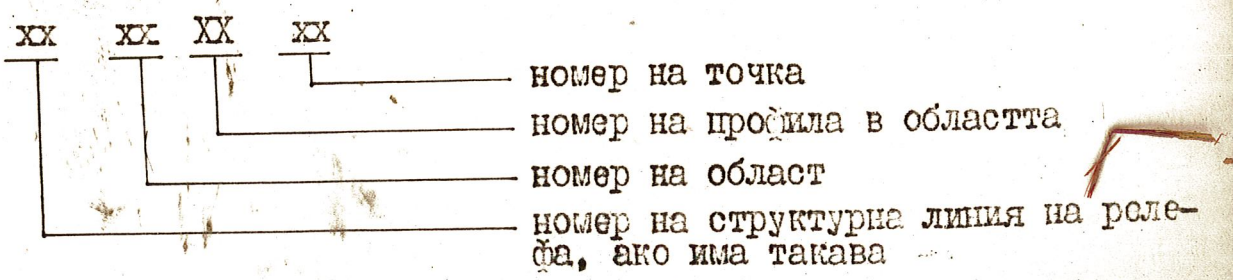
Ако точка С съвпада с точка К+1, преминава се към образуване на нов триъгълник като А ≡ С, а В остава непроменена.

Ако точка С е точка от профил $j+1$, то за следващия триъгълник точка А ≡ А, а В ≡ С /фиг. 3.10/.

След $N_j - 1$ ротации и транслации на координатна система се получават $N_j + N_{j+1} - 2$ триъгълника с върхове, точки от профил j и $j+1$.

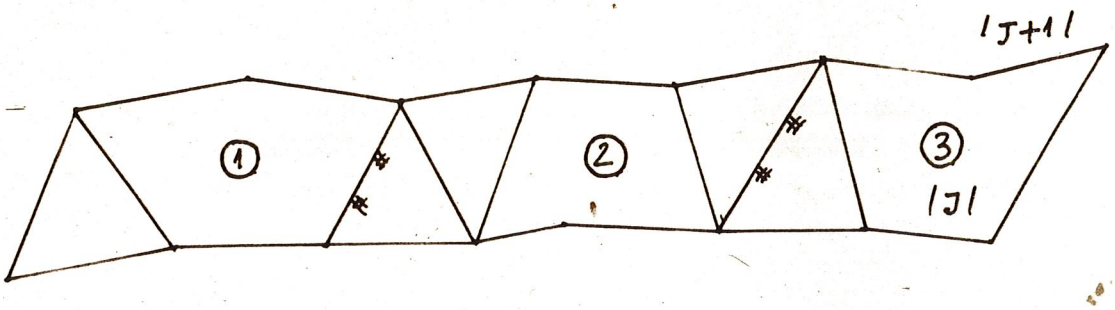
При $p = 1, 2, 3, \ldots, P-1$ се получава мрежата от непокриващи се триъгълници в областта.

Номерата на точките от профили се съставят примерно по следния начин:



Ако на профили j и $j+1$ има точки с еднакви номера на структурни линии на релефа, то в процеса на построяване на триъгълниците съответствуващите две точки от двата профила трябва да образуват страна, поне на един триъгълник / фиг. 3.11/.

Това става по следния начин: Разделя се ивицата, заградена между профил j и профил $j+1$ на части, така, че гранични отсечки да бъдат структурните линии, например; ако в ивицата има L структурни линии, броят на частите ще бъде $L+1$ / фиг. 3.11/. Във всяка част се образуват триъгълници по описания начин. В резултат на структурните линии принадлежат на страните на триъгълниците.



Фиг. 3.11

Отбелязваме, че алгоритъмът не е валиден за участъци от профили, в които $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$, β е ъгълът определен от точки К-1, К, К+1, а при $\beta > \frac{\pi}{2}$ ивицата би трябвало да се раздели на части с помощта на структурните линии.

3.4. Определяне вида на теренните гранични линии на триъгълния елемент

Ще решим следната задача:

Дадени са две точки P_0 и P_3 и тангенциалните равнини в точка P_0 и P_3 , където P_0 и P_3 са два върха на триъгълник. Да се определи апроксимационна крива на граничната крива през точки P_0 и P_3 за която максималното отклонение от хордата P_0P_3 отговаря на условие / 3.1.1/

Ще определим точки P_1 от тантегна T_1 и P_2 от тангента T_2 така, че полученият многоъгълник $P_0P_1P_2P_3$ да бъде многоъгълник на

Базе, дефиниращ кривата на Безе, която едновременно удовлетворява условие / 3.1.1/ и условие / 3.1.2/.

3.4.1. Определяне на наклона на тангентите T_1 и T_2 .

Тангенциалната равнина в точка P_0 е определена по начина, изложен в точка 2.1.5 и има уравнение:

$$\bar{H}_{P_0} = H_{P_0} + a_{P_0} x + b_{P_0} y ,$$
$$x = X - X_0 , \quad y = Y - Y_0 , \qquad / 3.4.1/$$

където a_{P_0} е наклона на пресечницата между тангенциалната равнина и вертикалната равнина $x P_0 H$, която минава през точка P_0 . Аналогично в b_{P_0} е наклона на пресечницата на тангенциалната равнина и вертикалната равнина $y P_0 H$.

Височината на точка P_3 от тангенциалната равнина с равнинни координати $/ X_{P_3}, Y_{P_3} /$ се определя с оглед на / 3.4.1/:

$$\bar{H}_{P_3} = H_{P_0} + a_{P_0}(X_{P_3} - X_{P_0}) + b_{P_0}(Y_{P_3} - Y_{P_0}) . \qquad / 3.4.2/$$

От / 3.4.2/ имаме

$$a_{P_0}(X_{P_3} - X_{P_0}) + b_{P_0}(Y_{P_3} - Y_{P_0}) = \bar{H}_{P_3} - H_{P_0} . \qquad / 3.4.3/$$

От / 3.4.3/ се получава

$$T_{P_0P_3} = a_{P_0} \cos\alpha_{P_0P_3} + b_{P_0} \sin\alpha_{P_0P_3} , \qquad / 3.4.4/$$

където

$$\cos\alpha_{P_0P_3} = \frac{X_{P_3} - X_{P_0}}{S_{P_0P_3}} , \quad \sin\alpha_{P_0P_3} = \frac{Y_{P_3} - Y_{P_0}}{S_{P_0P_3}} , \qquad / 3.4.5/$$

$$T_{P_0P_3} = \frac{\bar{H}_{P_3} - H_{P_0}}{S_{P_0P_3}} , \qquad /3.4.6/$$

$S_{P_0P_3}$ е разстояние между точка P_0 и P_3, $\alpha_{P_0P_3}$ е посочният ъгъл на страната P_0P_3 . Аналогично се определя и наклона на тангента T_2 .

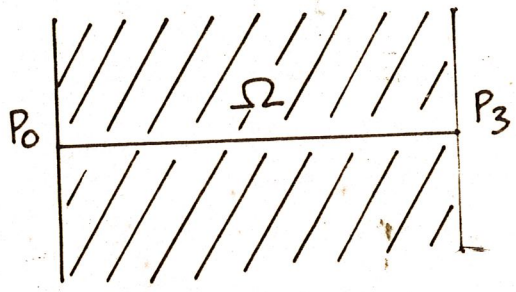
3.4.2. Определяне вида на граничните линии на триъгълния елемент

Частта от равнината, заградена между двете прави, които са перпендикулярни на P_0P_3 в точки P_0 и P_3 нека означим с Ω / фиг. 3.12/.

Нека T_1 и T_2 са тангенти в точка P_0 и P_3 . Нека P_1 лежи на

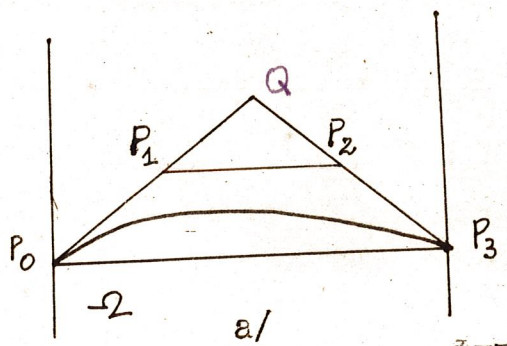
T_1 , а P_2 – на T_2 / $P_0P_1P_2P_3$ е многоъгълник на Безе/.

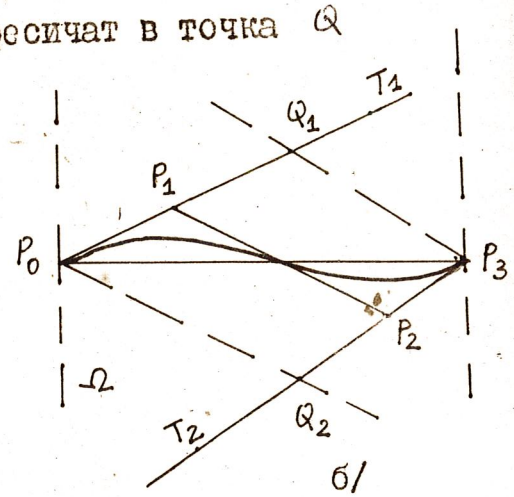
От точка 3.1 е известно, че когато точки P_1 и P_2 са отдалечени линейно от точка P_0 и P_3 по тангентите T_1 и T_2 тогава максималното разстояние между кривата на Безе и хордата се увеличава и обратно / фиг. 3.7/.



фиг. 3.12

При първия случай тангентите се пресичат в точка Q / фиг. 3.13/





Фиг. 3.13

Тогава

$$\vec{P_1} = \vec{P_0} + (\vec{Q} - \vec{P_0})\,\mu,$$

$$P_2 = P_3 + (Q - P_3)\,\mu, \qquad / \text{ 3.4.7/}$$

където $\vec{P_0}$, $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, $\vec{Q}$ са вектори на точките P_0 , P_1 , P_2 , P_3 , Q ; а μ е коефициент на кривата на Безе.

б/при втория случай тангентите не се пресичат в областта Ω. Тогава тангента T_2 се завърта около ос P_0P_3 до пресичането ѝ с T_1 , а T_1 се завърта около P_0P_3 до пресичането ѝ с T_2 за да се определят точки Q_1 и Q_2 / фиг. 3.13/.

Тогава

$$\vec{P_1} = \vec{P_0} + (\vec{Q_1} - \vec{P_0})\mu ,$$
$$\vec{P_2} = \vec{P_3} + (Q_2 - P_3)\mu . \qquad /3.4.8/$$

Кривата на Безе, модифицирана от многоъгълника $P_0P_1P_2P_3$ има следния вид:

$$P(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3P_3 . \qquad /3.4.9/$$

Коефициента μ се определя по следния начин:

В зависимост от наклона на релефа се избира число N . Например при наклона до 5^0 е подходящо $N = 6$, а при стръмен се приема $N = 12$.

Тогава

$$\mu = K/N ; \quad K = N, N-1, \ldots, 0 . \qquad /3.4.10/$$

За различните стойности на К се определят редицата от стойностите на точките $P_1^{(K)}$ и $P_2^{(K)}$, които дефинират многоъгълниците $P_0P_1^{(K)}P_2^{(K)}P_3$. При различни стойности на К, при първия случай точки $P_1^{(K)}$ и $P_2^{(K)}$ се движат по тангентите T_1 и T_2 от точка Q / фиг. 3.13, а/ до точки P_0 и P_3 съответно. Аналогично, втория случай / фиг. 3.13, б/ точки $P_1^{(K)}$ и $P_2^{(K)}$ се движат по тангентите T_1 и T_2 от точки Q_1 и Q_2 до точки P_0 и P_3 съответно.

Първата двойка точки $P_1^{(K)}$ и $P_2^{(K)}$, при които кривата на Безе изпълнява условие / 3.1.1/ се избират като точки P_1 и P_2 .

Ако К = 0 кривата се превръща в права отсечка P_0P_3. Тогава се приемат $\vec{P_1} = \frac{1}{3}(\vec{P_3} - \vec{P_0})$ и $\vec{P_2} = \frac{2}{3}(\vec{P_3} - \vec{P_0})$ съгласно точка 2.1.3, /ос $OX \equiv P_0P_3$/

При $\mu = 2/3$ за първия случай / точка а/ имаме / ос $OX \equiv P_0P_3$/

$$\vec{P_1} = \vec{P_0} + 2/3(\vec{Q} - \vec{P_0}),$$
$$\vec{P_2} = \vec{P_3} + 2/3(\vec{Q} - \vec{P_3}). \qquad /3.4.11/$$

При това положение многоъгълника $P_0P_1P_2P_3$ дефинира крива от втора степен, която е частен случай на кубическата крива на Безе / точка 2.13/.

Максималното отклонение между кривата и хорда се определя

по следния начин:

$$f_{max} = max \{ f_\ell \}, \qquad / 3.4.12/$$

където f_ℓ е отклонението между кривата и хордата в дискретните точки ℓ.

Височините на точките от кривата се определят по формулата:

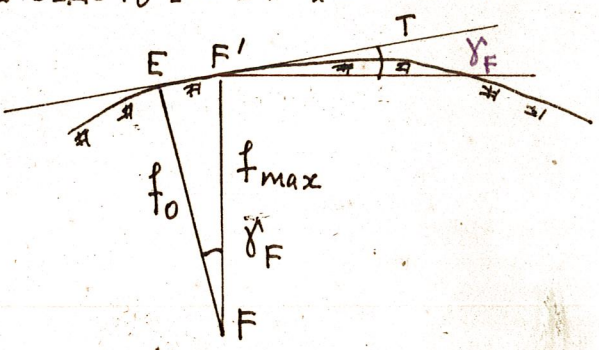
$$H(t) = (1-t)^3 H_{P_0} + 3t(1-t)^2 H_{P_1} + 3t^2(1-t) H_{P_2} + t^3 H_{P_3}, \qquad / 3.4.13/$$

където H_{P_0}, H_{P_1}, H_{P_2}, H_{P_3} са височини на точките P_0, P_1, P_2, P_3 съответно.

3.4.3. Определяне на $D_{gon.}$ за теренната линия

Нека точка F е точка от хордата $i-j$, която е пета на перпендикуляра, спуснат от екстремната точка от кривата на Безе.

При засипването на релефа максималното отклонение между терена и хордата трябва да бъде f_0 [27] / фиг. 3.14/



Фиг. 3.14

Да прекараме вертикална равнина през F, перпендикулярна на хордата $i-j$. Тази равнина нека е равнината на чертежа на фиг. 3.14 а хордата $i-j$ е перпендикулярна на равнината на чертежа. Пробода на хордата $i-j$ и вертикалната равнина е точка F.

Точка F' е прободна точка на теренната линия с вертикалната равнина. Нека с F'T означим пресечната линия между вертикалната равнина и тангенциалната равнина в точка F'. Ъгълът на наклон на терена в точка F' по направлението F'T да означим с γ_F.

$F'T$ е тангента на терената линия, получена като пресечница между терената повърхнина и вертикалната равнина. Във вертикалната равнина от точка F се спуска перпендикуляр FE към тангентата $F'T$ Приемаме $f_o = \overline{FE}$, където $\overline{FE}$ е дължина на отсечката FE .

Съгласно / 3.4.3/ вали:

$$tg\,\gamma_F = a_{F'} \cos\alpha_{F'T} + b_{F'} \sin\alpha_{F'T} . \qquad /3.4.14/$$

Тъй като $\alpha_{F'T} = \alpha_{ij} + \frac{\pi}{2}$ следва, че

$$tg\,\gamma_F = a_{F'} \sin\alpha_{ij} - b_{F'} \cos\alpha_{ij} . \qquad / 3.4.15/$$

Определянето на $a_{F'}$ и $b_{F'}$ се извършва чрез линейна интерполация по формулата

$$a_{F'} = \frac{a_j - a_i}{s_{ij}} s_{Fi} + a_i ,$$

$$b_{F'} = \frac{b_j - b_i}{s_{ij}} s_{Fi} + b_i . \qquad / 3.4.16/$$

Тогава f_{max} се определя / фиг. 3.14/

$$f_{max} = \frac{f_o}{\cos|\gamma_F|} , \qquad /3.4.17/$$

откъдето се приема

$$D_{gon.} = \frac{f_o}{\cos|\gamma_F|} . \qquad / 3.4.18/$$

При малък ъгъл γ_F имаме

$$D_{gon.} \approx f_o . \qquad / 3.4.19/$$

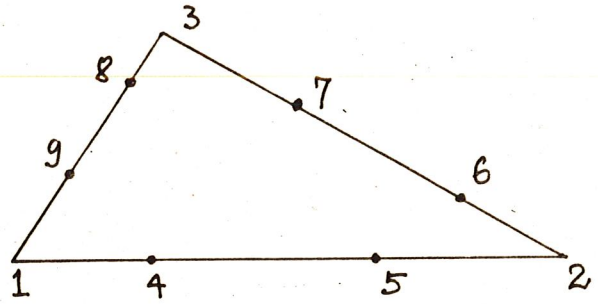
3.5. Интерполационна функция определена от дискретни точки по тангентите на граничните линии в триъгълния елемент

Нека приемем, че дискретните точки върху тангентите са тези, които определят многоъгълници на Безе и се получават в процеса на построяване на триъгълния елемент.

Да означим:

- P_1, P_2, P_3 – височини на върховете на триъгълника

- $P_4, P_5, \dots, P_9$ – височини на точките 4,5,..,9, където точки 4 и 5 са точки на многоъгълника от 1,4,5,2. Аналогично – точки 6 и 7 са точки от многоъгълника 2,6,7,3, а точки 8,9 – от 3,8,9,1 / фиг. 3.15/.



Фиг. 3.15

Ще покажем начин за получаване на интерполационна функция за триъгълния елемент в следния вид:

$$H(x,y) = \sum_{s=1}^{9} P_s p_s , \qquad / 3.5.1/$$

където p_s са базисни функции.

За наклоните на тангентите към граничните линии ij и ik съгласно / 3.4.4/ важи

$$T_{ij} = a_i \cos\alpha_{ij} + b_i \sin\alpha_{ij} ,$$
$$T_{ik} = a_i \cos\alpha_{ik} + b_i \sin\alpha_{ik} . \qquad / 3.5.2/$$

След умножение на първото уравнение / 3.5.2/ със $\sin\alpha_{ik}$, а на второто със $\sin\alpha_{ij}$ и изваждане се получава

$$a_i \sin(\alpha_{ik} - \alpha_{ij}) = T_{ij} \sin\alpha_{ik} - T_{ik} \sin\alpha_{ij} . \qquad / 3.5.3/$$

Но:
$$T_{ij} = \frac{P_m - P_i}{S_{im}} = K_m (P_m - P_i) ; \quad K_m = \frac{1}{S_{im}} ;$$
$$T_{ik} = \frac{P_n - P_i}{S_{in}} = K_n (P_n - P_i) ; \quad K_n = \frac{1}{S_{in}} ; \qquad / 3.5.4/$$

където $m \in \{4,6,8\}$, а $n \in \{5,7,9\}$.

След заместване на / 3.5.4/ в / 3.5.3/ и решаване по отношение на a_i се получава:

$$a_i = [P_i(-K_m \sin\alpha_{ik} + K_n \sin\alpha_{ij}) +$$
$$+ P_m K_m \sin\alpha_{ik} - P_n K_n \sin\alpha_{ij}] / \sin(\alpha_{ik} - \alpha_{ij}) . \qquad / 3.5.5/$$

Аналогично, ако се умножи първото уравнение от / 3.5.2/ със $\cos\alpha_{ik}$, а второто със $\cos\alpha_{ij}$ и се извадят, след преобразуване се получава:

$$b_i = [\, P_i(-K_n \cos\alpha_{ij} + K_m \cos\alpha_{ik}) + P_m(-K_m)\cos\alpha_{ik} +$$

$$+ P_n K_n \cos\alpha_{ij}\,] \,/\, \sin(\alpha_{ik} - \alpha_{ij}). \qquad /\ 3.5.6/$$

От друга страна имаме:

$$\sin\alpha_{ij} = \frac{\Delta y_{ij}}{s_{ij}}\ ,\ \cos\alpha_{ij} = \frac{\Delta x_{ij}}{s_{ij}}\ ,$$

$$\sin\alpha_{ik} = \frac{\Delta y_{ik}}{s_{ik}}\ ,\ \cos\alpha_{ik} = \frac{\Delta x_{ik}}{s_{ik}} \qquad /\ 3.5.7/$$

$$\sin(\alpha_{ik} - \alpha_{ij}) = \frac{1}{s_{ij} s_{ik}} (\Delta x_{ij}\Delta y_{ik} - \Delta y_{ij}\Delta x_{ik}) =$$

$$= \frac{1}{s_{ij} s_{ik}} \det(i,j,k) = \frac{D_{ijk}}{s_{ij} s_{ik}}\ ,$$

където:

$$\Delta x_{ij} = x_j - x_i\ ,\quad \Delta y_{ij} = y_j - y_i\ ,$$

$$\Delta x_{ik} = x_k - x_i\ ,\quad \Delta y_{ik} = y_k - y_i\ , \qquad /\ 3.5.8/$$

$$D_{ijk} = \det(i,j,k).$$

Въз основа на формулата на Ермит / 2.5.4/ важи

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \left[P_i q_i + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_i r_i' + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_i s_i' \right], \qquad /\ 3.5.9/$$

където:

$$q_i = L_i^2 (3 - 2L_i + 2L_j L_k),$$

$$r_i' = L_i^2 (L_k \Delta x_{ki} + L_j \Delta x_{ji}) + \frac{1}{2} L_i L_j L_k (\Delta x_{ki} + \Delta x_{ji}) \qquad /\ 3.5.10/$$

$$s_i' = L_i^2 (L_k \Delta y_{ki} + L_j \Delta y_{ji}) + \frac{1}{2} L_i L_j L_k (\Delta y_{ki} + \Delta y_{ji}).$$

Тъй като

$$\left(\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\right)_i = a_i\ ,\quad \left(\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\right)_i = b_i \qquad /\ 3.5.11/$$

Формула / 3.5.9/ приема следния вид:

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{3} (P_i q_i + a_i r_i' + b_i \delta_i') . \qquad / 3.5.12/$$

След заместване на / 3.5.5/ и / 3.5.6/ в / 3.5.12/ и след преобразуващи се получава:

$$\begin{aligned} H(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \{ & q_i + [K_m S_{ij} (- r_i' \Delta y_{ik} + \delta_i' \Delta x_{ik}) + \\ & + K_n S_{ik} (r_i' \Delta y_{ij} - \delta_i' \Delta x_{ij})] / D_{ijk} \} P_i + \\ & + \sum_m P_m (r_i' \Delta y_{ik} - \delta_i' \Delta x_{ik}) S_{ik} K_m / D_{ijk} + \\ & + \sum_n P_n (- r_j' \Delta y_{jk} + \delta_j' \Delta x_{jk}) S_{ji} K_n / D_{ijk} , \end{aligned} \qquad / 3.5.13/$$

където (i,j,k) е циклично заместване с индексите /1,2,3/, т.е $(i=1, j=2, k=3)$; $(i=2, j=3, k=1)$; $(i=3, j=1, k=2)$.

Ако означим $r_i = r_i'/D_{ijk}$, $\delta_i = \delta_i'/D_{ijk}$, $r_j = r_i'/D_{ijk}$, $\delta_j = \delta_j'/D_{ijk}$ тогава формула / 3.5.13/ приема вида:

$$\begin{aligned} H(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \{ & q_i + [K_m S_{ij} (- r_i \Delta y_{ik} + \delta_i \Delta x_{ik}) + \\ & + K_n S_{ik} (r_i \Delta y_{ij} - \delta_i \Delta x_{ij}) \} P_i + \\ & + \sum_m P_m (r_i \Delta y_{ik} - \delta_i \Delta x_{ik}) S_{ik} K_m + \\ & + \sum_n P_n (- r_j \Delta y_{jk} + \delta_j \Delta x_{jk}) S_{ji} K_n . \end{aligned} \qquad / 3.5.14/$$

Въз основа на точка 2.2 може да се запише още:

$$S_{ij} K_m = \frac{S_{ij}}{S_{im}} = \frac{D_{ijk}}{(S_{im}/S_{ij}) D_{ijk}} = \frac{D_{ijk}}{D_{mki}} = \frac{1}{L_j(m)} \qquad / 3.5.15/$$

Аналогично

$$S_{ij} K_n = \frac{1}{L_j(n)} . \qquad / 3.5.16/$$

Съгласно / 3.5.15/ и / 3.5.16/ формула / 3.5.14/ се изразява с
ще чрез L -координатите във вида:

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \{ q_i + \frac{1}{L_j(m)} (- r_i \Delta y_{ik} + \delta_i \Delta x_{ik}) +$$

$$+\frac{1}{L_K(n)}\left(r_i\Delta y_{ij}-\delta_i\Delta x_{ij}\right)P_i+$$

$$+\sum_m P_m\left(r_i\Delta y_{ik}-\delta_i\Delta x_{ik}\right)\frac{1}{L_j(m)}+ \qquad /3.5.17/$$

$$+\sum_n P_n\left(-r_j\Delta y_{jk}+\delta_j\Delta x_{jk}\right)\frac{1}{L_j(n)}.$$

Формула / 3.5.17/ е от вида / 3.5.1/, което искахме да докажем. Формула / 3.5.1/ описва част с триъгълна форма от повърхнина в която точки i,j,k се намират на самата повърхнина, а другите точки P_s $(s=4,5,\ldots,9)$ не са от повърхнината.

Коефициентите на част от съществуващите интерполационни формули се определят от зададени точки, които лежат на самата повърхнина и производните в някои от тях / например формулата на Ермит/. Тези формули имат недостатъци, които затрудняват системите за интеративното проектиране на повърхнини в диалогов режим. Задаването на формата на повърхнината с числови характеристики, като производните, не осигурява интуитивното усещане на връзка между числата и форма на повърхнина.

Получената формула / 3.5.17/ до някаква степен създава условия потребителя за по-ясно представяне на повърхнина. Потребителят може да изменя формата на повърхнината чрез изменения на входните точки 4,5,...,9, докато достигне до желаното решение. Това има важно значение в машинната графика при интеративно проектиране на повърхнини и често се среща в практиката.

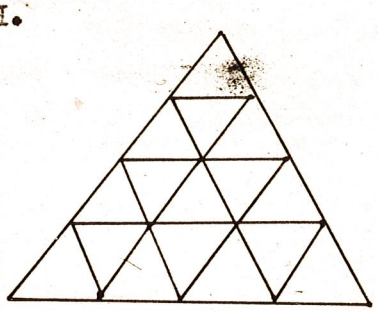
3.6. Сгъстяване на триъгълните елементи

От своя страна всеки триъгълен елемент може да се раздели по подходящ начин на по-малки триъгълници, които се наричат подтриъгълници. Предполага се, че граничните линии на триъгълните елементи

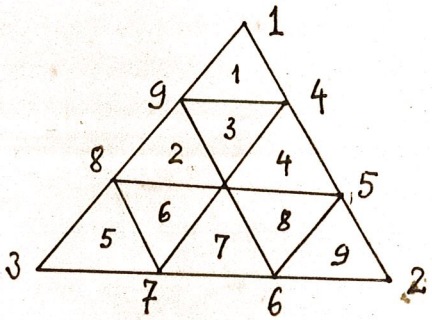
са построени по начини, изложен в точка 3.4.

Ако всяка страна на даден триъгълник се раздели на n равни части / фиг. 3.16/ и през точките на делене се прекарат успоредни линии на страните на триъгълника, в резултат се получава n^2 еднакви подтриъгълници, подобни на изходния.

Подходящо е примерно страните на триъгълника да се разделят на три равни части /$n = 3$/. В случая се получават 9 подтриъгълника. Нека номерираме триъгълниците и върховете им както е показано на фиг 3.17. По такъв начин изходния нелинеен триъгълен елемент се замсня от по-малките триъгълни елементи, за които се прилага линейна интерполация.



Фиг. 3.16



Фиг. 3.17

Ако се въведат L -координати за изходния триъгълник вали:

$$0 \leq L_i \leq 1 \qquad /3.6.1/$$

или

$$0 \leq 3L_i \leq 3. \qquad /3.6.2/$$

Ако положим $3L_i = L'_i$ от / 2.7.2/ имаме

$$0 \leq L'_i \leq 3. \qquad /3.6.3/$$

При това положение се съставя средната таблица:

Таблица 3.6

N	Върхове на подтриъгълник I	J	K	L'_1	L'_2	L'_3
1	2	3	4	5	6	7
1	1	4	9	2	0	0
2	8	9	10	1	0	1

Продължение от таблица 3.6

1	2	3	4	5	6	7
3	4	9	10	1	0	0
4	4	5	10	1	1	0
5	3	7	8	0	0	2
6	7	8	10	0	0	1
7	6	7	10	0	1	1
8	5	6	10	0	1	0
9	2	5	6	0	2	0

Точка с равнинни координати $/X, Y/$, съответно L –координати $/L_1, L_2, L_3/$ се намира в поредния подтриъгълник m с върхове j_m, k_m, l_m ако се изпълнява условието:

$$INT(L_i * 3) = L_i^{(m)}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad /3.6.4/$$

където $L_i^{(m)}$ е значението на L_i в реда m от табл. 3.6.

Координатите $/X_{10}, Y_{10}/$ на точка 10 – точка на центъра на тежестта на изходния триъгълник се определят по формулите

$$X_{10} = (X_1 + X_2 + X_3)/3, \quad Y_{10} = (Y_1 + Y_2 + Y_3)/3. \qquad /3.6.5/$$

Височина на точка 10 се определя въз основа на / 2.4.7/ по формулата

$$H_{10} = \frac{1}{4} \sum_{i=4}^{9} H_i - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} H_i, \qquad /3.6.6/$$

където H_1, H_2, H_3 са височини на върховете на изходния триъгълник, а H_4, H_5, H_6, ..., H_9, са височини на точките 4,5,..,9, които лежат на кривите на Безе и се определят по формула / 3.4.13/ при $t = 1/3$ и за точки 4,6,8 и $t = 2/3$ за точки 5,7,9,

Въз основа на / 2.3.13/ височината на точка зададена с равнинните си координати $/X, Y/$, попадаща вподтриъгълника $j_m k_m l_m$ се определя по формулата:

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{3} H_i^{(m)} \mathcal{L}_i^{(m)} \qquad /3.6.7/$$

където $H_i^{(m)}$ $/i = 1,2,3/$ са височини на върховете на подтриъгълника а $\mathcal{L}_i^{(m)}$ са L -координати на подтриъгълника.

Равнинните координати на точки $m \in \{4,6,8\}$ и $n \in \{5,7,9\}$ се определят по формулите:

$$\begin{aligned} x_m &= x_i + (x_j - x_i)/3 , \\ y_m &= y_i + (y_j - y_i)/3 , \\ x_n &= x_i + 2(x_j - x_i)/3 , \\ y_n &= y_i + 2(y_j - y_i)/3 . \end{aligned} \qquad /3.6.8/$$

3.7. Числени примери

На два обекта е извършена тахиметрична снимка. За първия обект е изработен план в М 1:1000 и основно сечение на хоризонталите 1 м, а за втория е изработен план в М 1:200. Използуван е и трети обект, изходните точки, за който са отчетени от топографска карта в М 1:5000 с основно сечение 2 м.

Чрез програма на Бейсик по начина, изложен в точка 3.3 са построени мрежи от непокриващи се триъгълници за отделните обекти. Височините на едни и същи точки се определят чрез отчитане от плана / картата/ и от програмите и се образуват разлики, от които е съставена таблица 3.7.1, таблица 3.7.2 и таблица 3.7.3.

Височините на точките са определени по следните начини:

1. Линейна интерполация

$$H^{(1)} = a + bx + cy , \qquad /3.7.1/$$

където a, b, c се определят въз основа на начина, изложен в точка 2.3.

2. Нелинейна интерполация:

а/ $$H^{(2)} = \sum_{j=1}^{9} H_j \bar{N}_j , \qquad /3.7.2/$$

където H_1 , H_2 , H_3 са височини на върховете на триъгълниците, в които попада точка $/x,y/$, $\bar{N}_j$ се определят въз основа на формули-

те / 2.4.6/ и / 2.4.9/, а $H_4, H_5, \ldots, H_g$ – са височини на точки от кривите на Безе, след делена на хордите на три равни части и са получени по начина, изложен в точка 3.4.

б/ $$H^{(3)} = \sum_{j=1}^{g} H_j p_j \qquad / 3.7.3/$$

където H_1, H_2, H_3 са височини на върховете на триъгълника, в който попада точката, а p_j се определят по начина, изложен в точка 3.5.

в/ $$H^{(4)} = a^{(m)} + b^{(m)} x + c^{(m)} y, \qquad /3.7.4/$$

където $a^{(m)}, b^{(m)}, c^{(m)}$ са атрибути към подтриъгълника, получен чрез сгъстяване на основния триъгълник по начина, изложен в точка 3.6.

В таблица 3.7 с ΔH са означени разликите между височините на едни и същи точки, получени от изчислението и отчитането им от плановете, т.е.

$$\Delta H_{\wedge} = H^{(1)} - H^{(K)}, \quad \Delta H_{KP} = H^{(2)} - H^{(K)},$$
$$\Delta H_T = H^{(3)} - H^{(K)}, \quad \Delta H_{\Delta} = H^{(4)} - H^{(K)},$$

от които се изчислят средни квадратни разлики по формулата

$$m = \sqrt{\frac{[(\Delta H)^2]}{N}},$$

където $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, $H^{(4)}$ се определят по формулите / 3.7.1/ / 3.7.2/, / 3.7.3/, / 3.7.4/, а $H^{(K)}$ са височини на същите точки, получени от отчитане от плановете.

От разгледаните в тази глава въпроси и примери могат да се направят следните основни изводи:

1. При достатъчна гъстота и целесъобразно местоположение на точките, при условие, че страните на триъгълниците следват тере-

на, точността на ЦМР при нелинейната интерполация не е по-голяма от тази при линейната интерполация.

2. При нелинейна интерполация е достатъчно да се използува формула / 3.7.2/, при която информацията на базата данни за ЦМР е най-малка.

3. Интерполациите по формули / 3.7.2/ и / 3.7.4/ дават практически еднакви резултати.

4. Предложените начини могат да се прилагат с успех в задачите за автоматизация на проектирането.

Като имаме предвид тези изводи в глава IV ще бъдат създадени две програмнисистеми за изграждане на база данни за ЦМР и изчертаване на профили.

Таблица 3.7.1

1	2	3	4	5
1	0,01	0,02	0,01	0,03
2	-0,02	-0,05	0,07	0,00
3	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14
4	-0,18	-0,16	-0,15	0,14
5	-0,22	-0,22	-0,23	-0,07
6	0,14	0,15	0,15	0,04
7	0,20	0,20	0,19	0,19
8	0,20	0,11	0,11	0,19
9	0,49	0,27	0,31	0,28
10	0,08	0,08	0,09	0,03
11	-0,11	-0,13	-0,13	-0,12
12	0,00	0,05	0,06	0,01
13	-0,06	-0,07	-0,05	0,05
14	-0,08	-0,11	-0,13	-0,16
15	-0,21	-0,10	-0,11	-0,20
16	-0,14	-0,23	-0,21	-0,12
17	0,21	0,27	0,25	0,21
18	0,25	0,28	0,33	0,23
19	0,29	0,24	0,24	0,26
20	0,00	0,00	0,02	0,04
21	-0,12	-0,21	-0,20	-0,17
22	-0,22	-0,22	-0,18	-0,25
23	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05
24	-0,11	-0,12	-0,12	-0,15
25	-0,17	-0,27	-0,21	-0,04
26	-0,22	-0,18	-0,16	-0,22
27	-0,08	-0,12	-0,11	-0,07
28	0,16	0,14	0,13	0,33
29	0,17	0,17	0,06	0,15	0,23
30	0,09	-0,11	-0,08	-0,05

Продължение от табл.3.7.1

1	2	3	4	5
I				
31	-0,10	-0,20	-0,22	-0,19
32	-0,19	-0,16	-0,19	-0,19
33	-0,07	-0,15	-0,14	-0,17
34	-0,08	-0,08	-0,08	-0,07
35	-0,02	0,06	0,02	-0,05
36	-0,06	-0,05	-0,08	-0,04
37	-0,05	-0,06	0,00	0,00
38	0,06	0,04	0,04	0,04
39	0,03	0,02	0,02	0,01
40	0,11	0,05	0,06	0,13
41	0,16	0,12	0,13	0,17
42	0,04	-0,07	-0,08	0,04
43	-0,17	-0,23	-0,24	-0,16
44	-0,06	-0,11	-0,11	-0,04
45	0,10	0,05	0,05	0,06
46	0,11	0,08	0,08	0,07
47	0,11	0,08	0,04	0,07
48	0,12	0,00	0,02	-0,29
49	0,01	0,08	0,08	-0,13
50	0,14	0,15	0,20	0,10
51	0,03	0,10	0,07	0,06
52	0,04	0,11	0,12	0,03
53	-0,01	-0,02	-0,02	-0,22
54	-0,15	-0,19	-0,18	-0,18
55	-0,19	-0,31	-0,32	0,05
56	0,08	0,12	0,08	0,11
57	-0,10	-0,20	-0,19	-0,15

Продължение от табл.3.7.1

1	2	3	4	5
58	0,28	0,29	0,25	0,23
59	0,08	0,13	0,11	0,16
60	0,75	1,10	1,04	0,77
61	0,25	0,33	0,34	0,38
62	0,12	0,06	0,05	0,19
63	0,17	0,11	0,10	0,11
64	0,13	0,20	0,23	0,07
65	0,00	0,05	0,06	0,00
66	-0,14	-0,14	-0,12	-0,12
67	0,21	0,18	0,17	0,20
68	-0,04	-0,06	-0,01	-0,05
69	0,06	0,02	0,03	0,01
70	0,10	0,13	0,14	0,09
71	0,29	0,31	0,32	0,30
72	0,06	0,17	0,14	0,06
73	0,11	0,13	0,13	0,06
74	-,-6	90,09	-0,05	0,02
75	-0,09	-0,26	-0,22	0,05
76	-0,13	-0,27	-0,26	-0,14
77	-0,08	-0,21	-0,20	-0,17
78	-0,43	-0,41	-0,42	-0,52
79	-0,06	-0,20	-0,18	-0,14
80	-0,11	-0,07	-0,10	-0,10
81	-0,04	0,00	-0,02	-0,06
82	-0,09	0,06	0,04	-0,10
83	-0,13	-0,10	-0,09	-0,19
84	-0,38	-0,36	-0,39	-0,31
85	0,06	0,06	0,05	0,05

Продължение от табл.3.7.1

1	2	3	4	5
86	-0,01	-0,01	0,00	-0,01
87	0,21	0,11	0,11	-0,45
88	-0,71	-0,79	-0,76	-1,17
89	-0,17	-0,36	-0,38	-0,56
90	-0,08	0,10	0,02	-0,02
91	-0,03	0,35	0,24	-0,06
92	-0,11	0,32	0,24	0,32
93	-0,15	-0,13	-0,11	-0,01
94	-0,21	-0,12	-0,10	-0,15
95	-0,13	-0,18	-0,19	-0,16
96	0,14	0,10	0,09	0,16
97	0,18	0,17	0,18	0,17
98	0,22	0,19	0,17	0,51
99	0,25	0,29	0,27	0,30
100	0,26	0,31	0,26	0,26
101	0,16	0,32	0,30	0,28
102	0,10	0,19	0,17	0,06
103	0,15	0,24	0,24	0,19
104	0,10	0,23	0,20	0,17
105	-0,17	-0,17	-0,13	-0,09
106	-0,30	-0,28	-0,31	-0,32
107	0,00	0,00	0,02	0,05
108	0,05	0,15	0,10	0,17
109	0,08	0,25	0,25	0,19
110	0,51	0,60	0,60	0,66

Продължение от табл.3.7.1

1	2	3	4	5
111	0,53	0,64	0,65	0,66
112	0,23	0,50	0,48	0,12
113	0,06	0,13	0,14	0,10
115	0,09	0,08	0,06	0,17
116	0,08	0,05	0,07	0,28
117	-0,03	-0,04	0,01	0,25
118	0,10	0,19	0,15	0,39
119	-0,13	0,06	0,02	0,14

$= \sqrt{4,3662/119} = 0,19$ м

$= \sqrt{6,3674/119} = 0,23$ м

$= \sqrt{5,9474/119} = 0,22$ м

$= \sqrt{6,2466/119} = 0,23$ м

Таблица 3.7.2

N	ΔH	$\Delta H_{кр}$	ΔH_{Δ}	$\Delta H_{т}$
1	0,04	0,28	0,28	0,63
2	0,26	0,25	0,26	0,75
3	0,17	0,18	0,16	0,58
4	-0,10	0,12	0,12	0,36
5	0,08	0,42	0,38	-0,71
6	0,36	0,63	0,58	1,01
7	0,45	0,29	0,16	0,50
8	-0,14	0,59	0,35	0,10
9	-0,33	0,18	0,07	-0,10
10	-0,07	0,06	0,02	0,00
11	0,09	0,01	0,09	0,29
12	0,01	0,01	0,01	0,52
13	-0,10	-0,09	-0,04	0,85
14	-0,12	-0,26	-0,12	1,06
15	0,00	-0,05	-0,01	0,07
16	-0,05	0,07	0,07	0,21
17	-0,45	-0,09	-0,05	0,28
18	-0,10	-0,13	-0,21	0,43
19	-0,13	-0,14	-0,13	-0,21
20	-0,16	-0,18	-0,17	-0,10
21	-0,15	-0,08	-0,09	-0,03
22	-0,10	-0,11	-0,11	-0,01
23	-0,04	-0,02	-0,02	0,08
24	-0,01	0,09	0,07	0,13
25	-0,08	0,19	0,19	0,37
26	-0,14	-0,20	-0,29	-0,26
27	0,13	-0,12	-0,13	-0,11
28	-0,11	-0,13	-0,13	0,27
29	-0,08	-0,06	-0,07	0,18
30	0,04	0,13	0,12	0,22
31	-0,04	0,01	-0,03	0,10
32	-0,03	-0,05	-0,05	0,15
33	0,16	0,16	0,15	0,18
34	0,12	0,13	0,13	0,06
35	-0,01	-0,09	-0,13	0,15
36	0,19	-0,05	0,00	0,02
37	0,14	-0,05	-0,08	0,02
38	0,25	0,26	-0,18	0,00
39	0,19	0,25	0,25	-0,02

Продължение от табл.3.7.2

N	ΔH_{Λ}	$\Delta H_{кр.}$	ΔH_{Δ}	$\Delta H_{т}$
40	0,25	0,04	0,13	0,04
41	0,18	-0,07	-0,08	-0,07
42	-0,03	0,03	-0,02	0,03
43	-0,07	-0,04	-0,07	-0,04
44	0,25	0,06	0,13	0,06
45	0,32	0,59	0,49	0,13
46	0,07	-0,11	-0,13	-0,34
47	0,02	-0,24	-0,25	-0,38
48	0,08	-0,27	-0,21	-0,41
49	0,01	-0,39	-0,35	-0,69
50	-0,26	-0,51	-0,38	-0,95
51	-0,09	-0,09	-0,11	-0,31
52	-0,11	-0,13	-0,14	-0,58
53	0,06	0,13	-0,02	-0,96
54	-0,07	-0,10	+0,05	-0,47
55	-0,25	-0,30	-0,27	-0,90

$$m_{h_{\Lambda}} = \sqrt{\frac{1,6004}{55}} = 0,17 \text{ м}$$

$$m_{h_{кр}} = \sqrt{\frac{2,7901}{55}} = 0,23 \text{ м}$$

$$m_{h_{\Delta}} = \sqrt{\frac{2,1\ 400}{55}} = 0,20 \text{ м}$$

$$m_{h_{т}} = \sqrt{\frac{10,4946}{55}} = 0,44 \text{м}$$

Таблица 3.7.3

N	ΔH_{Λ}	$\Delta H_{кр.}$	ΔH_{Δ}	$\Delta H_{т}$
1	-0,16	-0,14	-0,14	-0,05
2	-0,70	-0,65	-0,66	-0,63
3	0,06	0,14	0,10	0,08
4	0,04	0,13	0,14	0,21
5	0,07	0,00	0,03	0,20
6	0,02	-0,06	-0,06	0,01
7	0,04	0,00	-0,01	0,08
8	-0,16	-0,39	-0,35	-0,12
9	-0,06	-0,17	-0,17	0,00
10	-0,30	-0,27	-0,07	-0,33
11	-0,29	-0,38	-0,41	-0,32
12	0,16	-0,11	-0,10	0,09
13	0,05	0,13	0,12	0,18
14	0,30	0,39	0,41	0,33
15	0,38	0,35	0,36	0,43
16	-0,68	-0,80	-0,75	-0,70
17	-0,02	0,15	0,12	0,03
18	0,58	0,29	0,27	0,25
19	0,00	-0,20	-0,11	-0,10
20	0,15	0,04	0,02	0,03
21	-0,27	-0,31	-0,32	-0,27
22	0,29	0,37	0,37	0,29
23	-0,35	-0,68	-0,59	-0,41
24	-0,42	-0,47	-0,48	-0,40
25	-0,47	-0,21	- 0,22	-0,33
26	0,16	0,08	0,09	0,15
27	0,10	0,35	0,34	0,06
28	-0,37	-0,30	-0,29	-0,37
29	-0,19	-0,04	-0,02	-0,31
30	0,59	0,60	0,60	0,58
31	0,29	0,44	0,40	0,09
32	0,21	0,23	0,24	0,27

Продължение от табл.3.7.3

N	ΔH_{Λ}	$\Delta H_{кр}$	ΔH_{Δ}	$\Delta H_{т}$
33	0,21	0,24	0,25	0,23
34	-0,63	-0,65	-0,67	-0,55
35	-0,17	-0,52	-0,50	-0,36
36	0,21	0,05	0,10	-0,02
37	0,28	0,20	0,25	0,21

$$m_{h_{\Lambda}} = \sqrt{\frac{3,6689}{37}} = 0,31 \text{ м}$$

$$m_{h_{кр.}} = \sqrt{\frac{4,5527}{37}} = 0,35 \text{ м}$$

$$m_{h_{\Delta}} = \sqrt{\frac{4,2841}{37}} = 0,34 \text{ м}$$

$$m_{h_{т}} = \sqrt{\frac{3,4207}{37}} = 0,30 \text{ м}$$

Г Л А В А Ч Е Т В Ъ Р Т А

Нека на територията А е зададено множество точки $\{B_k / X_k, Y_k /, k = \overline{1,n}\}$ разположени на характерни места. Точките могат да се получат от отчитане от картата / плана/, полярни снимки или от фотограметрични изследвания.

Необходимо е да се създаде база данни за ЦМР на територията и въз основа на базата да се извлекат профили, по зададени направления.

4.1. Програмна система за създаване на база данни за ЦМР и извличане на профили чрез линейна интерполация - - аналитично решение

Редът на решаването чрез програмната система е както следва:

- въвеждане на информацията;
- създаване на блокове за територията;
- построяване на мрежа от непокриващи се триъгълници за всеки блок;
- проверка и коригиране на построените триъгълници за всеки блок;
- решаване на триъгълните елементи - определяне атрибутите на триъгълните елементи.

1. Въвеждане на информацията. Подходящо е изходните данни да са непосредствените измервания. В такъв случай данните трябва да се преработят за да се получат списъци от координатите и височини на заснетите точки. Списъците с координати и височини служат за изходни данни при създаване на базата за ЦМР.

2. Създаване на блоковете

Нека приемем, че територията е покрита от квадратна мрежа със страни D /точка 3.2/. За съставяне на списъка от блокове на територията най-напред се съставя списък на основните квадрати. За целта се постъпва по следния начин:

– определяне на списък $Q_\kappa /[x]_\kappa , [y]_\kappa /$, $\kappa = \overline{1,n}$, където $[x]_\kappa$ и $[y]_\kappa$ се определят по формулите:

$$[x]_\kappa = [x_\kappa // D]\, D \quad , \qquad / 4.1.1/$$
$$[y]_\kappa = [y_\kappa // D]\, D \quad ,$$

– от списъка за Q_κ се съставя списък $P_\ell /[x]_\ell , [y]_\ell /$, така че двойката $[x]_\ell$ и $[y]_\ell$ се среща само един път.

Множеството $\{P_\ell /[x]_\ell , [y]_\ell /\}$ съдържа списък на югозападните точки на основните квадрати от мрежата.

Блоковете се образуват от основните квадрати по начин, показан на фиг. 4.1.

Страната на блока е $D + 2DS$, където DS се определя въз основа на формула / 3.2.2/.

Точка с координати $/x, y/$ се намира в основния квадрат от блок ℓ, ако

$$[x]_\ell \le x \le [x]_\ell + D \quad , \qquad / 4.1.2/$$
$$[y]_\ell \le y \le [y]_\ell + D$$

и принадлежи в блока ℓ, ако

$$[x]_\ell - DS \le x \le [x]_\ell + D + DS \quad , \qquad / 4.1.3/$$
$$[y]_\ell - DS \le y \le [y]_\ell + D + DS \quad .$$

Името на блока ℓ може да се формира по следния начин:

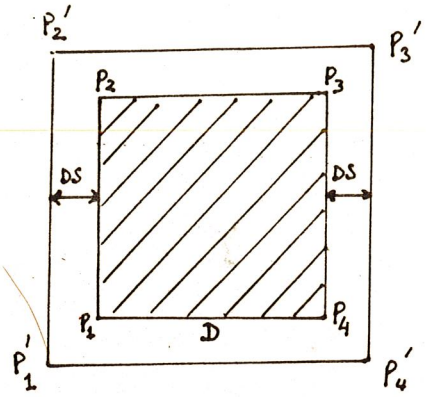
$$XX - x_\ell \,\&\, y_\ell \quad , \qquad / 4.1.4/$$

където XX – съкратено име на територията / код/;

$x_\ell \,\&\, y_\ell$ – комбинация от координатите на югозападния връх на основния кладрат. Координатите се определят по следния начин:

$$x_\ell = \frac{[x]_\ell}{D} \quad ,$$

$$y_\ell = \frac{[y]_\ell}{D} \quad .$$



Фиг. 4.1

3. Построяване на мрежата от непокриващи се триъгълници в блоковете

Най-напред се образуват подобласти, които се намират в блока и след това се построяват непокриващи се триъгълници в отделните подобласти.

Построяването на триъгълниците за всяка подобласт се извършва по алгоритъма, изложен в точка 3.3. В процеса на построяването на триъгълниците се взема пред вид, че две точки на два съседни профила с еднакви характеристики на релефа трябва да бъдат страна от триъгълника.

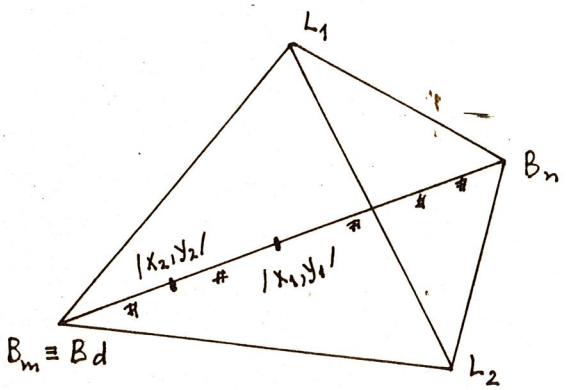
4. Проверка и коригиране на триъгълниците

Ако мрежата от непокриващи се триъгълници се построи без да се отчетат структурните линии, примерно по начин, изложен в [14], тогава трябва да се провери и извърши коригирането така, че всички структурни линии да се страни от триъгълници / ако има такива/.

Нека $B_m B_n$ е отсечка от дадена характерна линия. Проверява се дали $B_m B_n$ съвпада с някоя страна от списъка на страните на триъгълниците. Ако съвпада, коригиране не трябва да се извършва. В противен случай се изчислява:

$$X_i = X_m + (X_n - X_m)/(2*J),$$
$$Y_i = Y_m + (Y_n - Y_m)/(2*J), \qquad /4.1.5/$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots$$

където (X_m, Y_m) и (X_n, Y_n) са координати на точките B_m и B_n съответно. Намираме триъгълник с пореден номер – например p ; съдържащ точка (X_i, Y_i) така, че да има връх B_m или B_n . Триъгълникът p , който съдържа точката B_m ще отбележим с $B_d \equiv B_m$ / фиг. 4.2/. Върховете на триъгълника p нека са B_m, L_1, L_2 .

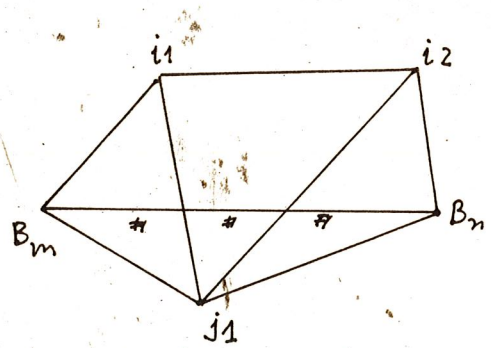


Фиг. 4.2

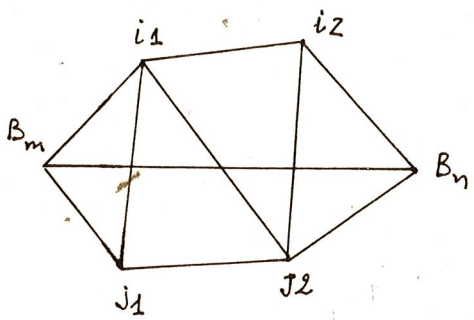
С помощта на отсечката $L_1 L_2$ се определят два триъгълника с поредни номера p_1 и p_2 / естествено p ще съвпада с p_1 или p_2 /, в които $L_1 L_2$ е обща страна. Ако B_n / в случая/ е един връх на триъгълника p_1 или p_2 коригирането се извършва по следния начин:

- поредния триъгълник p_1 ще има нови върхове B_m, L_1, B_n
- поредния триъгълник p_2 ще бъде с върхове B_m, L_2, B_n. С други думи диагонала $L_1 L_2$ на четириъгълника $B_m L_1 B_n L_2$ е заменен със структурната линия $B_m B_n$.

Ако B_n не е връх на триъгълници P_1 или p_2 се достига до по-сложния случай като този от фиг. 4.3 и фиг. 4.4.



Фиг. 4.3



Фиг. 4.4

Всеки многоъгълник с К върха съдържа / К – 2/ непокриващи се триъгълника.

По отсечката $B_m B_n$ се определят върховете на съществуващи триъгълници $p_1, p_2, \dots, p_{K-2}$. След това се определят върховете, които се намират от ляво на правата $B_m B_n$ и върховете отдясно на правата $B_m B_n$. Например точките от лявата страна на $B_m B_n$ са

$$B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{iK} ; \qquad /4.1.6/$$

а точки отдясна страна на $B_m B_n$ са:

$$B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jK}, \qquad /4.1.7/$$

където $iK + jK = K-2$.

Най-накрая се построяват непокриващи се триъгълници между профила от точки B_m, B_n и профила от точки $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{iK}$ по начина, изложен в точка 3.3.

Аналогично се построяват триъгълниците между профила и профила $B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jK}$. В резултат се получава списък от К–2 нови триъгълници. Старите върхове на триъгълниците $p_1, p_2, \dots, p_{K-2}$ се заменят с получените нови върхове.

5. Определяне на атрибутите към всеки триъгълник за всеки блок

За всеки триъгълник ijk се определят атрибути a, b, c които се получават от решение на системата / точка 2.3/

$$\begin{aligned} a + b X_i + c Y_i &= H_i , \\ a + b X_j + c Y_j &= H_j , \\ a + b X_K + c Y_K &= H_K , \end{aligned} \qquad /4.1.8/$$

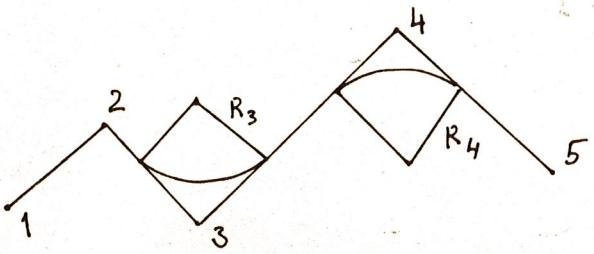
където $/X_i, Y_i, H_i/$, $/X_j, Y_j, H_j/$, $/X_K, Y_K, H_K/$ са координати на точки i, j и k съответно.

При това положение височината на точка със зададени равнинни координати се определя въз основа на / 2.3.1/

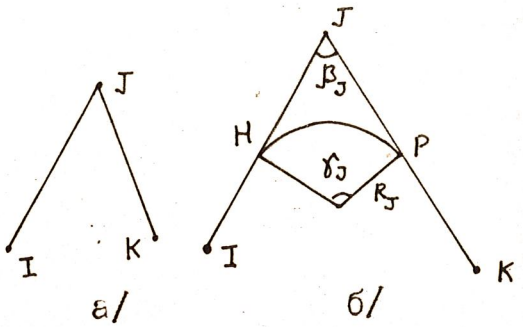
$$H = a + bX + cY . \qquad /4.1.9/$$

6. Автоматизирано извличане на профили

Трасето на профила се състои най-често от прави отсечки и кръгови дъги / фиг. 4.5/.



Фиг. 4.5



Фиг. 4.6

Нека разстоянието между подробните точки в профила е S . Нашата задача е да се определи височините им.

Редът на решението на задачата е следния:

- определяне на равнинните координати на подробните точки;
- определяне на блоковете, в които попадат точките;
- определяне на триъгълниците, в които попадат точките;
- определяне на височините им.

Равнинните координати на подробните точки в профила се определят по следния начин:

Да означим I, J, K – три поредни точки от начупения полигон на профила / 4.6/ Ако при J няма кръгова крива, подробните точки са точки от отсечката IJ / фиг. 4.6.а/ Ако при J има кръгова крива с радиус R_J , подробните точки са точки от отсечката IH и дъгата $\overset{\frown}{HP}$, където H и P са допирателни точки /фиг.4.6.б/.

В правия участък координатите на точките се определят по първа основна задача. По дъгата на кръговата крива координатите се определят като се използува полярна координатна система с начало в точка H , начално направление посоката HJ и полярен ъгъл ϑ ,

$$\vartheta_{max} = \alpha_{HP} - \alpha_{HJ} ,$$

където α_{HP} и α_{HJ} се определят по формулите:

$$\alpha_{HJ} = arctg \frac{y_j - y_H}{x_J - x_H}, \qquad / 4.1.10/$$

$$\alpha_{IJ} = arctg \frac{y_j - y_I}{x_j - x_i}, \qquad / 4.1.11/$$

$$\alpha_{HP} = \alpha_{IJ} + \frac{\gamma}{2} sign\,[det(I,J,K)]. \qquad / 4.1.12/$$

Координатите на точките от правия участък се изчисляват по формулите

$$x_i = x_{i-1} + DS \cos \alpha_{IJ},$$
$$y_i = y_{i-1} + DS \sin \alpha_{IJ}, \qquad / 4.1.13/$$

където DS е разстояние между две съседни точки по трасето.

Координатите по дъгата на подробните точки се определят по формулите

$$x_i = x_{i-1} + D \cos \gamma_i,$$
$$y_i = y_{i-1} + D \sin \gamma_i, \qquad / 4.1.14/$$

където

$$\gamma_i = i\,\delta \quad (\gamma_i \leq \theta),$$
$$D = 2 R_J \sin \gamma_i, \qquad / 4.1.15/$$
$$\delta = \frac{DS}{2 R_J} sign\,[det(I,J,K)],$$

R_J – радиус на кръговата крива при точка J.

Определянето на блоковете и триъгълниците, в които попадат точките се извършва въз основа на формули / 3.2.7/ и / 3.2.8/ съответно.

Височините на подробните точки H_i се определят по формула / 4.1.9/.

$$H_i = a + b\,x_i + c\,y_i, \qquad / 4.1.17/$$

където $/x_i, y_i/$ – равнинни координати на подробните точки

a, b, c – атрибути към триъгълника, в който попада точката

4.2. Програмна система за създаване на база данни за ЦМР и извличане на профили чрез нелинейна интерполация – аналитично решение

Редът на решаването чрез програмната система е следния:

- въвеждане на информацията;
- създаване на блокове за територията;
- построяване на мрежа от непокриващи се триъгълници за всеки блок;
- проверка и коригиране на построените триъгълници за всеки блок;
- определяне на параметрите на тангенциалната равнина в околността на всяка точка от блока;
- определяне на атрибутите на нелинейния триъгълен елемент.

Етапите от 1 до 4 са идентични с тези от точка 4.1.

5. Определяне на тангенциалните равнини в околността на изходните точки

Най-напред се определя вида на околната повърхнина на всяка изходна точка i, а след това и параметрите на тангенциалната равнина.

За целта се съставя списък на околните точки на точка i. Околните точки са тези, които с точка i образуват страни на триъгълниците. Нека техния брой е К.

Видът на уравнението на околната повърхнина зависи от броя К, както следва:

$$K = 3 \quad : \quad H = H_i + a_i x + b_i y, \qquad /4.2.1/$$

$$4 \le K < 6 \quad : \quad H = H_i + a_i x + b_i y + 2c_i xy, \qquad /4.2.2/$$

$$6 \le K \quad : \quad H = H_i + a_i x + b_i y + 2c_i xy + e_i x^2 + f_i y^2, \qquad /4.2.3/$$

където

$$x = X - X_i,$$
$$y = Y - Y_i.$$

От точка 2.1.5 следва, че a_i, b_i са параметрите на тангенциалната равнина на околната повърхнина. Параметрите a_i, b_i се определят чрез МНМК с уравнения на поправките от вида

$$K = 3 : v_i = a_i x_j + b_i y_j + l_i , \qquad / 4.2.4/$$

$$4 \le K < 6 : v_i = a_i x_j + b_i y_j + 2c_i x_j y_j + l_i , \qquad / 4.2.5/$$

$$6 \le K : v_i = a_i x_j + b_i y_j + 2c_i x_j y_j + e_i x_j^2 + f_i y_j^2 + l_i , \qquad / 4.2.6/$$

където

$$l_i = H_j - H_i ,$$
$$x_j = x_j - x_i , \qquad / 4.2.7/$$
$$y_j = y_j - y_i ,$$
$$j = 1, 2, \ldots, K .$$

Задачата се решава при условието

$$[p_j v_j v_j]' = min , \qquad / 4.2.8/$$

където p_j са тежести на H_j определени от съотношенията

$$p_j = \frac{S_{cp}}{S_{ij}} , \qquad / 4.2.9/$$

$$S_{cp} = \frac{\sum_{j=1}^{K} S_{ij}}{K} , \quad S_{ij} = x_j^2 + y_j^2 . \qquad / 4.2.10/$$

6. Определяне на атрибутите на триъгълния елемент

Тук атрибути на всеки триъгълник ijk са височините на шест точки от граничните криви на триъгълния елемент, както следва:

H_4, H_5 – височини на точки 4, 5 от кривата на Безе през точки i, j, където точки 4 и 5 разделят страна i-j на три равни части.

H_6, H_7 – височини на точки 6,7 от кривата на Безе през точка j, k където точки 6 и 7 разделят страна j-k на три /$n=3$/ равни части.

H_8, H_9 – височини на точки 8,9 от кривата на Безе през точка k, i където точки 8,9 разделят страна k-i на три равни части.

Определянето на атрибутите става след като се определят наклоните на тангентите към граничните линии.

Нека P_0 и P_3 са два върха на триъгълника. Тангенциалните равнини в точки P_0 и P_3 са определени съгласно точка 5.

Да въведем следните означение / фиг. 4.7/

θ_0 – наклона на тангентата T_1 към кривата в точка P_0 ;

θ_3 – наклона на тангентата T_2 към кривата в точка P_3 ;

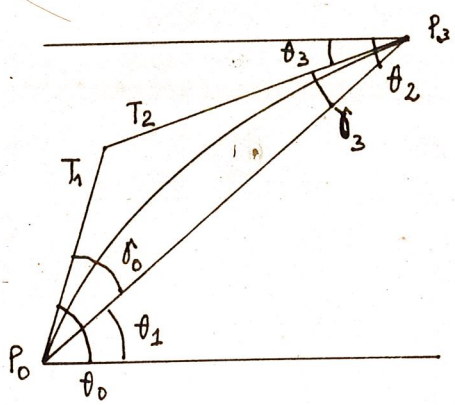
θ_1 – наклона на отсечка P_0P_3 ;

θ_2 – наклона на страна P_0P_3 , в случая $\theta_2 = -\theta_1$;

γ_0 – ъгъл между тангентата при точка P_0 и страната P_0P_3 ;

γ_3 – ъгъл между тангентата в точка P_3 и страната P_3P_0;

$\alpha_{P_0P_3}$ – посочния ъгъл на страната P_0P_3 .



Фиг. 4.7

От точка 2.2 е известно, че точка k е от лявата страна на правата mn , ако

$$\mathrm{sign}[\det(m, k, n)] = 1 , \qquad / 4.2.11/$$

а ако k е от дясна страна на mn важи

$$\mathrm{sign}[\det(m, k, n)] = -1 , \qquad / 4.2.12/$$

където m, k, n са подредени по посока на часовниковата стрелка.

– за тангентата T_1 да въведем

$$s_1 = \mathrm{sign}[\det(P_0, i, P_3)] , \qquad / 4.2.13/$$

където i е произволна точка от T_1 ;

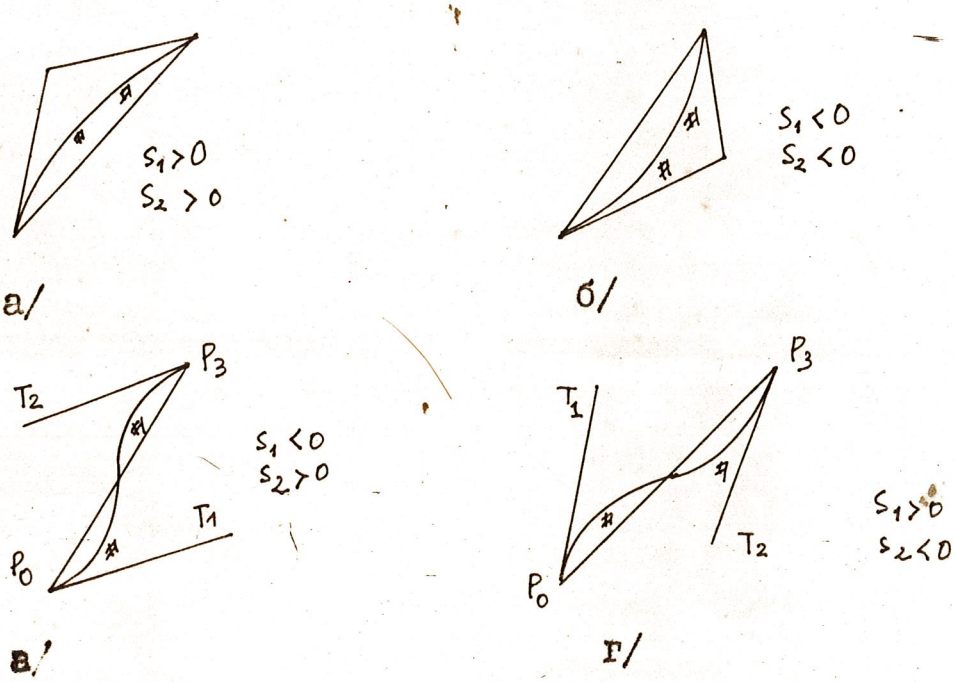
– за тангентата T_2 да въведем:

$$s_2 = \mathrm{sign}[\det(P_0, j, P_3)] , \qquad / 4.2.14/$$

където j е произволна точка от T_2 .

Ако тангентите T_1 и T_2 са разположени от дясната страна на P_0P_3 важи $s_1 = -1$ и $s_2 = -1$, а $s_1 = 1$ и $s_2 = 1$, когато T_1 и T_2 са от лявата страна на правата P_0P_3 .

Следователно разположението на граничните линии спрямо страната P_0P_3 зависи от знаците на s_1 и s_2 . На фиг. 4.8 са показани различни случаи на разположение на граничната линия, която минава през P_0 и P_3 при $\theta_1 > 0 / H_3 > H_0 /$. Аналогични са случаите при



Фиг. 4.8

Възможни са следните случаи:

- В точка P_0 :

при : $\theta_1 > 0$:

Ако $\theta_0 > 0$ и $\theta_0 < \theta_1$ имаме $\gamma_0 = \theta_1 - \theta_0$; $s_1 = -1$.

Ако $\theta_0 > \theta_1 > 0$ имаме $\gamma_0 = \theta_0 - \theta_1$; $s_1 = 1$.

Ако $\theta_0 < 0$ имаме $\gamma_0 = \theta_1 + |\theta_0|$.

При $\theta_1 < 0$:

Ако $\theta_0 > 0$ имаме $\gamma_0 = |\theta_1| + \theta_0$; $s_1 = 1$.

Ако $\theta_0 < 0$ и $|\theta_0| < |\theta_3|$ имаме $\gamma_0 = |\theta_1| - \theta_0$; $s_1 = 1$.

Ако $\theta_0 < 0$ и $|\theta_0| > |\theta_1|$ имаме $\gamma_0 = |\theta_0| - |\theta_1|$; $s_1 = -1$.

В точка P_3 :

При $\theta_1 > 0$ / или $\theta_2 < 0$ /:

Ако $\theta_3 > 0$ имаме $\gamma_3 = |\theta_2| + \theta_3$; $s_2 = 1$.

Ако $|\theta_3| < |\theta_2|$ имаме $\gamma_3 = |\theta_2| - |\theta_3|$; $s_2 = -1$.

Ако $|\theta_3| > |\theta_2|$ имаме $\gamma_3 = |\theta_3| - |\theta_2|$; $s_2 = -1$.

При $\theta_1 < 0$ / или $\theta_2 > 0$ /:

Ако $\theta_3 > \theta_2 > 0$ имаме $\gamma_3 = \theta_3 - \theta_2$; $s_2 = 1$.

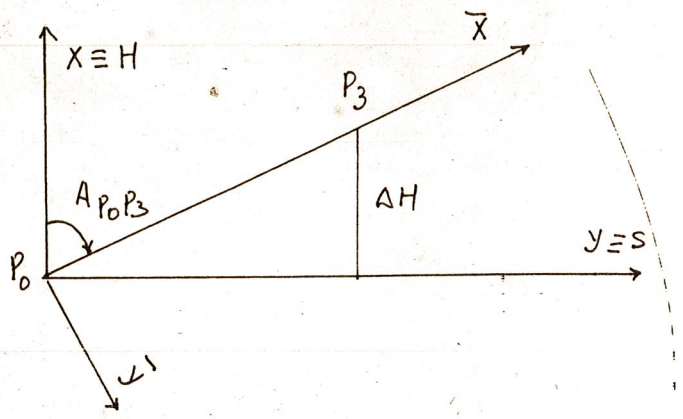
Ако $0 < \theta_3 < \theta_2$ имаме $\gamma_3 = \theta_2 - \theta_3$; $s_2 = -1$.

Ако $\theta_3 < 0$ имаме $\gamma_3 = \theta_2 + |\theta_3|$; $s_2 = -1$.

За всеки случай получаваме стойности на s_1 , γ_1 и s_2 , γ_2 в точките P_0 и P_3 съответно.

Във вертикалната равнина през $P_0 P_3$ приемаме координатна система $H P_0 S$, която има начало в точка P_0 , абсцисната ос е вертикална / фиг. 4.9/, а ординатната ос е положително надясно.

При това положение точка P_0 има координати / 0, 0/, а координатите на точка P_3 са $/\Delta H, S_{P_0 P_3}/$, където ΔH е превишението между точка P_0 и P_3 , а $S_{P_0 P_3}$ е хоризонталното разстояние между точки P_0 и P_3 .



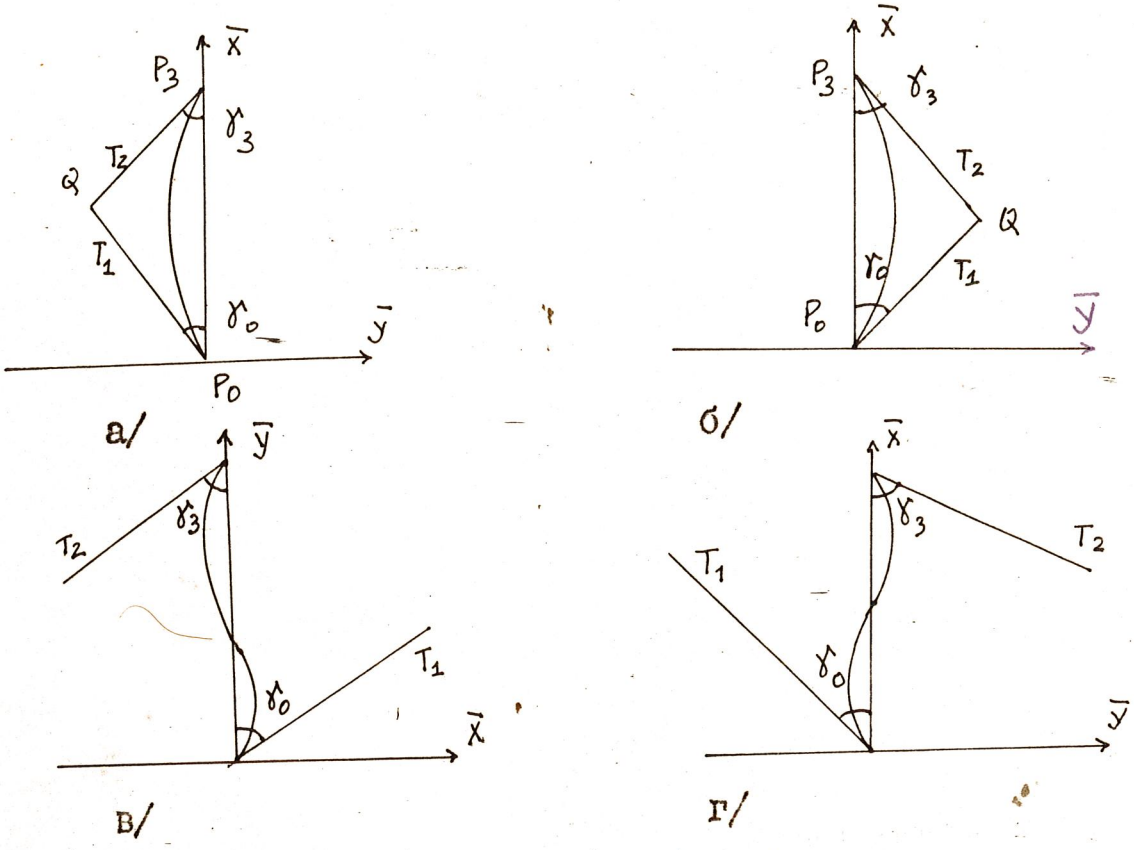
Фиг. 4.9

Извършваме транслация и ротация на координатната система в $\bar{X} P_0 \bar{Y}$, така, че новата абсцисна ос да минава през $P_0 P_3$.

Ъгълът на ротация се изчислява по формулата

$$A_{P_0 P_3} = arctg \frac{H_{P_3} - H_{P_0}}{S_{P_0 P_3}} \quad . \qquad / 4.2.15/$$

В новата координатна система $\bar{X}P_0\bar{Y}$ в първия квадрант $s_1<0$, $s_2<0$, а в четвъртия квадрант $s_1>0$, $s_2>0$ / фиг. 4.10/



Фиг. 4.10

Посочните ъгли на тангентите в новата координатна система $\bar{X}P_0\bar{Y}$ се определят по следния начин:

Ако $s_1>0$ имаме $\bar{\alpha}_{T_1} = 2\pi - \gamma_0$.

Ако $s_2>0$ имаме $\bar{\alpha}_{T_2} = \pi + \gamma_3$.

Ако $s_1<0$ имаме $\bar{\alpha}_{T_1} = \gamma_0$.

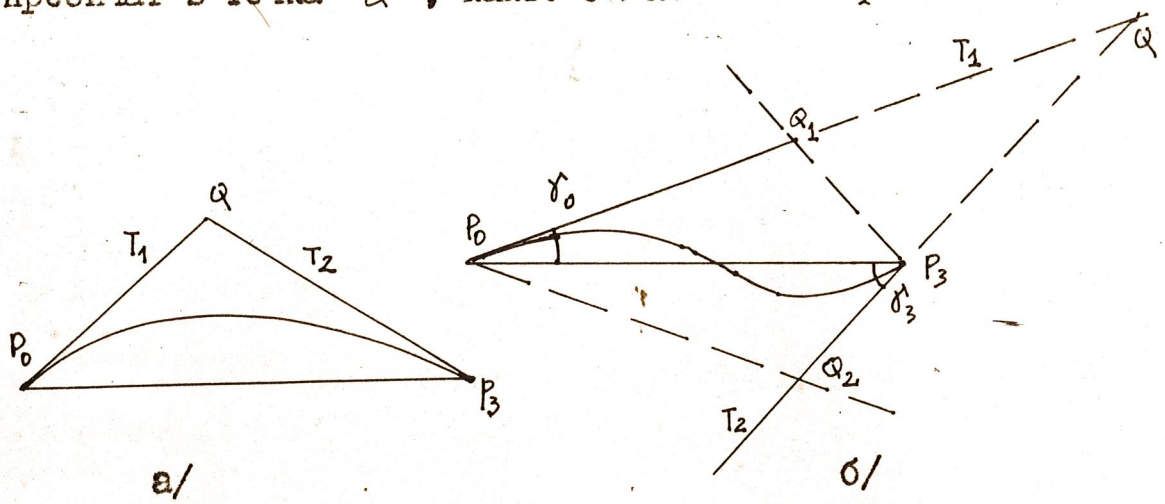
Ако $s_2<0$ имаме $\bar{\alpha}_{T_2} = \pi - \gamma_3$.

Координатите на коя и дае точка в новата координатна система $\bar{X}P_0\bar{Y}$ се изчисляват по формулите:

$$\bar{X} = \cos A_{P_0P_3}(X - X_{P_0}) + \sin A_{P_0P_3}(Y - Y_{P_0}),$$

$$\bar{Y} = -\sin A_{P_0P_3}(X - X_{P_0}) + \cos A_{P_0P_3}(Y - Y_{P_0}). \quad / 4.2.16/$$

При $s_1 s_2 > 0$ тангентите T_1 и T_2 се пресичат в точка Q, както е показано на фиг. 4.11.А. При $s_1 s_2 < 0$ тангентите T_1 и T_2 се пресичат в точка Q, както е показано на фиг. 4.11.б.



Фиг. 4.11

Определянето на точката P_1 на тангентата T_1 и P_2 на тангентата T_2 се извършва по начина, изложен в точка 3.4.2. При $s_1 s_2 > 0$ координатите на точка Q в координатната система $\bar{x} P_0 \bar{y}$ се определят чрез засечка напред:

$$\bar{x}_Q = \frac{-\bar{s}_{P_0P_3} \, tg\bar{\alpha}_{T_2}}{tg\bar{\alpha}_{T_1} - tg\bar{\alpha}_{T_2}} , \qquad / 4.2.17/$$

$$y_Q = \bar{x}_Q \, tg\bar{\alpha}_{T_2} ,$$

където $\bar{s}_{P_0P_3} = \bar{x}_{P_3} - x_{P_0} = \bar{x}_{P_3}$.

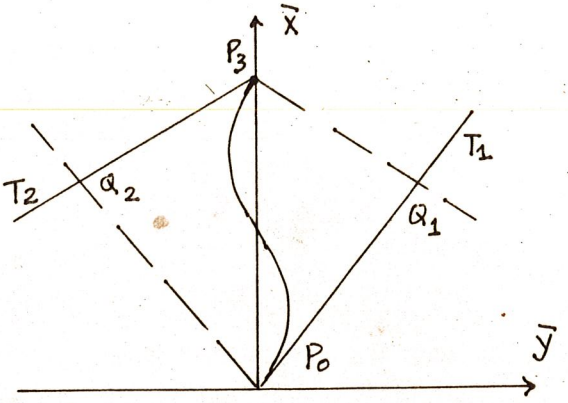
При $s_1 s_2 < 0$ координатите на точка Q_1 и Q_2 / фиг. 4.12/ се определят също чрез засечка напред по формулите

$$\bar{x}_{Q_1} = \frac{-\bar{s}_{P_0P_3} \, tg\bar{\alpha}_{P_3Q_1}}{tg\bar{\alpha}_{T_1} - tg\alpha_{P_3Q_1}} , \qquad / 4.2.18/$$

$$\bar{y}_{Q_1} = \bar{x}_Q \, tg\bar{\alpha}_{T_2} ,$$

където

- при $s_1 > 0$: $\alpha_{P_3Q_1} = \pi - \gamma_3$,
- при $s_2 < 0$: $\alpha_{P_3Q_1} = \pi + \gamma_3$.



Фиг. 4.12

Тъй като $S_{P_3Q_2} = S_{P_3Q_1}$, координатите на Q_2 се определят чрез първа основна задача:

$$\bar{X}_{Q_2} = \bar{X}_{P_3} + S_{P_3Q_2}\cos\bar{\alpha}_{T_2}\,,$$
$$\bar{Y}_{Q_2} = \bar{Y}_{P_3} + S_{P_3Q_2}\sin\bar{\alpha}_{T_2}\,. \qquad /\ 4.2.19/$$

В зависимост от степента на пресеченост на релефа се избира число N. Например, при сравнително равнинен терен $N = 6$; при пресечен терен $N = 12$.

Координатите на точка $P_1^{(K)}$ и $P_2^{(K)}$ / вж.Точ.3.4.2/ на тангентите T_1 и T_2 се определят по формулите:

$$\bar{X}_{P_1}^{(K)} = \bar{X}_{P_0} + \mu S_{P_0}\cos\bar{\alpha}_{T_1}\,, \qquad /\ 4.2.20/$$
$$\bar{Y}_{P_1} = Y_{P_0} + \mu S_{P_0}\sin\bar{\alpha}_{T_1}\,, \qquad /\ 4.2.2/$$
$$\bar{X}_{P_2} = \bar{X}_{P_3} + \mu S_{P_3}\cos\bar{\alpha}_{T_2}\,, \qquad /\ 4.2.22/$$
$$\bar{Y}_{P_2} = Y_{P_3} + \mu S_{P_3}\sin\bar{\alpha}_{T_2}\,, \qquad /4.2.23/$$

където

$$\mu = K/N\,;\quad K = N, N-1, \ldots, 1, 0\,; \qquad /\ 4.2.24/$$

При $S_1S_2 > 0$: $S_{P_0} = S_{P_0Q} = S_{P_3}$

При $S_1S_2 < 0$: $S_{P_0} = S_{P_0Q_1}$; $S_{P_3} = S_{P_3Q_1} = S_{P_3Q_2}$.

Когато $K = 2N/3$ и $S_1S_2 > 0$ имаме парабола от втора степен.

Когато $K = 0$ или $\gamma_0, \gamma_3 \leq 0{,}001$ се приемат, че точки P_1 и P_2

лежат на отсечката P_0P_3 и координатите им се изчисляват по формулите

$$\bar{x}_{P_1} = x_{P_0} + \frac{1}{3}(\bar{x}_{P_0} + \bar{x}_{P_3}), \quad / 4.2.25/$$

$$\bar{y}_{P_1} = y_{P_0} + \frac{1}{3}(\bar{y}_{P_0} + \bar{y}_{P_3}), \quad / 4.2.26/$$

$$\bar{x}_{P_2} = x_{P_0} + \frac{2}{3}(\bar{x}_{P_0} + \bar{x}_{P_3}), \quad / 4.2.27/$$

$$\bar{y}_{P_2} = y_{P_0} + \frac{2}{3}(\bar{y}_{P_0} + \bar{y}_{P_3}). \quad / 4.2.28/$$

При фиксирана стойност на К многоъгълника $P_0 P_1^{(K)} P_2^{(K)} P_3$ дефинира крива на Безе, където

$$\bar{x}^{(K)}(t) = \bar{x}_{P_0}J_0 + \bar{x}_{P_1}J_1 + \bar{x}_{P_2}^{(K)}J_2 + \bar{x}_{P_3}J_3, \quad / 4.2.29/$$

$$\bar{y}^{(K)}(t) = \bar{y}_{P_0}J_0 + \bar{y}_{P_1}J_1 + \bar{y}_{P_2}J_2 + \bar{y}_{P_3}J_3, \quad / 4.2.30/$$

а J_0, J_1, J_2, J_3 се определят по формули / 2.1.17/:

$$J_0 = (1-t)^3,$$

$$J_1 = 3t(1-t)^2,$$

$$J_2 = 3t^2(1-t), \quad / 4.2.31$$

$$J_3 = t^3; \quad t \in [0,1]$$

Максималното отклонение от кривата до хордата P_0P_3 се изчислява по формулата

$$f_{max}^{(K)} = max \mid \bar{y}^{(K)}(t_\ell) \mid, \quad / 4.2.32/$$

където t_ℓ приема примерно следните стойности: $t_1 = 0$; $t_2 = 0{,}15$; $t_3 = 0{,}5$; $t_4 = 0{,}65$; $t_5 = 0{,}85$; $t_6 = 1$.

Първата двойка $P_1^{(K)}, P_2^{(K)}$ $/K = N, N-1, \cdots /$ при която

$$f_{max}^{(K)} \leq D_{gen}. \quad / 4.2.33/$$

се избира за точки P_1 и P_2.

Ако $f_{max}^{(N)}$ не удовлетворява условие / 3.1.1/ се препоръчва следващите стойности на К да се изберат от редицата

$$k = N^* - 1, N^* - 2, \ldots, 1, 0; \quad / 4.2.34/$$

където $N^* = \frac{2}{3} N$.

За да се върнем към старата координатна система се изчислява:

$$H_{P_1} = X_{P_1} = \bar{X}_{P_0} + \bar{X}_{P_1} \cos A_{P_0P_3} - \bar{Y}_{P_1} \sin A_{P_0P_3}, \quad / 4.2.35/$$

$$S_{P_0P_3} = Y_{P_1} = \bar{Y}_{P_0} + \bar{X}_{P_1} \sin A_{P_0P_3} + \bar{Y}_{P_1} \cos A_{P_0P_3}, \quad / 4.2.36/$$

$$S_{P_0P_2} = Y_{P_2} = \bar{Y}_{P_0} + \bar{X}_{P_2} \sin A_{P_0P_3} + \bar{Y}_{P_2} \cos A_{P_0P_3}, \quad / 4.2.37/$$

$$H_{P_2} = X_{P_2} = \bar{X}_{P_0} + X_{P_2} \cos A_{P_0P_3} - \bar{Y}_{P_2} \sin A_{P_0P_3}. \quad / 4.2.38/$$

Разстоянието между точки P_2 и P_3 е

$$S_{P_2P_3} = S_{P_0P_3} - S_{P_0P_2}. \quad / 4.2.39/$$

За триъгълния елемент ijk /$i=1, j=2, k=3$/ важи:

- за граничната линия през i, j полагаме

$$i \equiv P_0, \; j \equiv P_3, \; P_4 \equiv P_1, \; P_5 \equiv P_2,$$

- за граничната линия през j, k полагаме

$$j \equiv P_0, \; k \equiv P_3, \; P_6 \equiv P_1, \; P_7 \equiv P_2,$$

- за граничната линия през k, i полагаме

$$k \equiv P_0, \; i \equiv P_3, \; P_8 \equiv P_1, \; P_9 \equiv P_2.$$

Тогава височините на точките от граничните криви по страните $i-j$, $j-k$, $k-i$ се изчисляват по формулите:

$$H_{ij}(t) = H_i J_0 + H_{P_4} J_1 + H_{P_5} J_2 + H_j J_3, \quad / 4.2.40/$$

$$H_{ik}(t) = H_j J_0 + H_{P_6} J_1 + H_{P_7} J_2 + H_k J_3, \quad / 4.2.41/$$

$$H_{ki}(t) = H_k J_0 + H_{P_8} J_1 + H_{P_9} J_2 + H_i J_3, \quad / 4.2.42/$$

където

- P_4, P_5 – точки от многоъгълника на Безе през i, j ;
- P_6, P_7 – точки от многоъгълника на Безе през j, k ;

- P_8, P_9 - точки от многоъгълника на Безе през k, i ;

Височините на точки 4,5 от кривата на Безе, които разделят страна $i-j$ на 3 равни части се изчисляват по формула / 4.2.40/ при $t = 1/3$ и $t = 2/3$ съответно.

Аналогично, височините на точки 6,7 от кривата на Безе, които разделят страната $j-k$ на три равни части се изчисляват по формула / 4.2.41/ при $t = 1/3$ и $t = 2/3$ съответно, а височините на точки 8,9 от кривата на Безе, които разделят страна $k-j$ на три равни части се изчисляват по формула / 4.2.42/ при $t = 1/3$ и $t = 2/3$ съответно.

Тези височини на точките служат като атрибути към триъгълника ijk.

4.3. Описание на подпрограми, които се използуват в програмните системи

Подпрограмите / модулите/ на програмните системи са записани на дискета 5.25 инча. Те могат да се копират с всички системни програми, като например FID, COPYA и др.

След завършване на изчисленията, всеки модул автоматично повиква управляващия модул. Всички необходими информации за работа на всеки модул се изписват на екрана.

Тук ще бъде изложено описанието на променливи, масиви и подпрограми, които се използуват във всеки модул.

1. Модул / 1/

Наименование: ZAPIS#1 .

Предназначение: запис върху дискета на списък с пространствените координати и номерата на точките.

N - брой на въведените точки

$TN/$ - масив с номера на точките, където "/" е знак за масив

$XT/, YT/, ZT/$ - равнинни координати и надморски висо-

чини на въведените точки.

В резултат се получава файл с името, въведено отоператора.

2. Модул / 2/

Наименование: ЗАПИС СПИСЪК

Модулът се използува за записване на файл върху дискет с име СПИСЪК + N$, където N$ се задава от оператора.

СК – брой на обектите от които се съставя базата данни
– масив, в който се записват имената на обэктите.

При подготвителна работа за създаването на ЦМР, масивът трябва да бъде празен. За целта операторът въвежда в началото символът " & ".

3. / Модул / 3/

Наименование: BAZ #

Модулът се използува за разпределяне на данните по блокове.

А. Описание на променливите и масивите:

CK – брой на областите в базата;

SP$/ – имена на областите в базата;

SP$/1/ – съдържа " СПИСЪК" + N$ където N$ се задава от оператора.

CS – брой на блоковете в една област

CG$/ – имена на блоковете в една област

CG$/1/ – име на областта

SD,TD – размери на правоъгълника / квадрата, когато SD=TD/ съответно по оси X и У

N – брой на точките в блока

TN/, XT/, YT/, ZT/– номера на точки и координати

KF – общ брой на блоковете, които влизат в базата

MF$ – имена на блоковете

YA, YB – лява и дясна граница на блока

XA, XB – долна и горна граница на блока

DK – максимална дължина на страните на триъгълниците

X0,Y0 - координати на югозападния ъгъл на основния правоъгълник / квадрата/

Името на всеки блок се формира по следния начин:

XX - X$ & Y$ # I

където

XX - име на обекта

X$&Y$ - функции на координатите на точките от основния правоъгълник / квадрата/

I - пореден номер на файловете. В специални случаи данните на един блок могат да де записват в няколко файл Различните файлове се различават един от друг с помощ на поредния номер.

Но това не се препоръчва, защото време за търсене на информацията ще се увеличи.

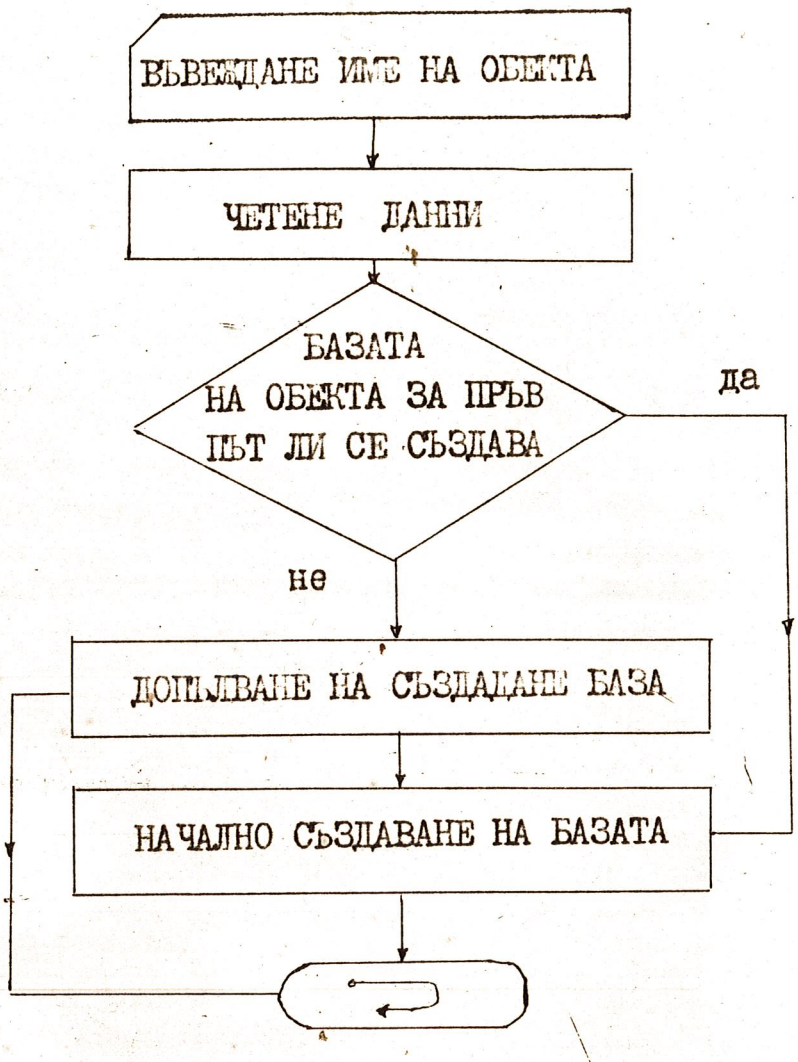
Б. Подпрограми

/1/ за изчисление на XX - X$&Y$ - начална програмна линия: 600

/ 2/ - четене от дискета на изходните данни - начална програмна линия: 4170

/3/ - записване на номерата на точките с координати от определен блок върху дискета - начална програмна линия: 402

В. БЛОК - СХЕМА



Фиг. 4.13

4. Модул / 4/

Наименование: ЧЕТЕНЕ СПИСЪК

На екрана се изписват имената на обектите

Описание на променливите и масивите:

CK - брой на обектите в списъка;

SP$/ - имена на обекти;

SP$/1/- съдържа " СПИСЪК N# " + N$, където N$ е зададено от оператора

5. Модул / 5/

Наименование : ЧЕТЕНЕ КАТАЛОГ

На екрана се исписва списък с блоковете от един обект

Описание на променливи и масиви:

CS - брой блокове в обекта;

CG$/ - имена на блокове, които принадлежат на обекта.

5. / Модул / 6/

Наименование: F.TR#

Предназначение: построяване на мрежа от непокриващи се триъгълници за всеки блок.

Описание на променливи и масиви:

N - брой точки в един блок, от който се образуват триъгълниците

M - брой на триъгълниците

K - брой на страните

S1%/, S2%/ - машинни номера на начални и крайни точки на страните на триъгълниците

TN/, XT/, YT/, ZT/ - намира и координатите на дадените точки

T1%/, T2%/, T3%/ - върхове на триъгълниците.

7. Модул / 7/

Наименование : ЧЕРТЕЖ #

Този модул се използува за изобразяване върху екрана на мрежата от триъгълници от един блок преди и след коригиране.

Описание на променливи и масиви:

N - брой точки

M - брой триъгълници

TN/, XT/, YT/, ZT/ - номера и координатите на точките от блока

T1%/, T2%/, T3%/ - върхове на триъгълниците

8. Модул / 8/

Наименование: KKKRR# .

Предназначение: С негова помощ се внасят корекции в мрежата от непокриващи се триъгълници по блокове.

А. Описание на променливите и масивите:

DW - средна дължина на триъгълниците в блока;

XL%/ - номера на точките от дадена структурна линия;

S1%/, S2%/ - машинни номера на началните и крайните точки на страните на триъгълниците;

S1%/, S2%/ - действителни номера на началните и крайните точки на страните на триъгълниците;

TN/, XT/, YT/, ZT/ - номера на точки и съответните им координати;

T1%/, T2%/, T3%/ - машинни номера на върховете на триъгълниците

Б. Подпрограми:

1/ Четене на изходните данни за блока - начална линия: 3390

2/ Намиране на $max/X_i, Y_i/$, $min/X_i, Y_i/$ - начална програмна линия: 5500

3/ намиране на триъгълник - начална линия: 5570

9. Модул / 9/

Наименование: SMD#

Предназначение: Създаване на ЦМР по блоковете от базата данни.

А. Описание на променливите и масивите:

N - брой на точките в блока

M - брой на триъгълниците

SR$/ - блоковете от територията

TN/, XT/, YT/, ZT/ - номера и координатите на изходните точки

T1%/, T2%/, T3%/ - машинни номера на върховете на триъгълници

A1/, A2/, A3/ - атрибутите на триъгълниците

A/3,4/ – коефициенти на нормална система

Б. Подпрограми

1/ Намиране на триъгълник – начална линия 5500

2/ решение на система линейни уравнения – начална линия 3300

3/ изчисление на атрибутите – начална линия 3100.

10. Модул / 10/

Наименование: A#

Предназначение: Изчисление на параметрите a, b на тангенциалните равнини към теренната повърхнина в изходните точки.

А. Описание на променливите и масивите.

N – брой на изходните точки в блока

M – брой на триъгълниците

L – брой на околните точки на точка

K – брой на страните на триъгълниците

TN/, XT/, YT/, ZT/ – номера и координатите на изходните точки

T1%/, T2%/, T3%/ – машинни номера на върховете на триъгълниците

S1%/, S2%/ – действителни номера на върховете на триъгълниците

XL/, YL/ – координати на локалните точки

A1/, A2/ – коефициенти на тангенциалните равнини в точките

Б. Подпрограми

1/ изчисление на посочен ъгъл – начална програмна линия: 2000

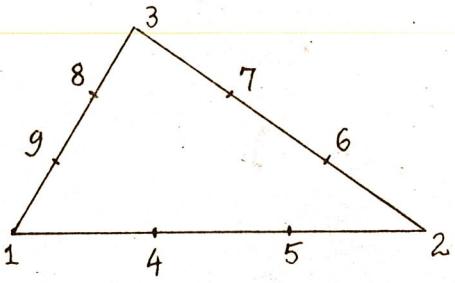
2/ решение на система линейни уравнения – начална линия 3300

11. Модул / 11/

Наименование: M#

Предназначение: Изчисление височините $H_4, H_5, \ldots, H_9$ на точки $4, 5, \ldots, 9$, където точки 4 и 5 разделят страната 1–2 на три равни части и т.н. Височините $H_4, H_5, \ldots, H_9$ се явяват като

атрибути към триъгълника / фиг. 4.14/



Фиг. 4.14

А. Описание на променливи и масиви:

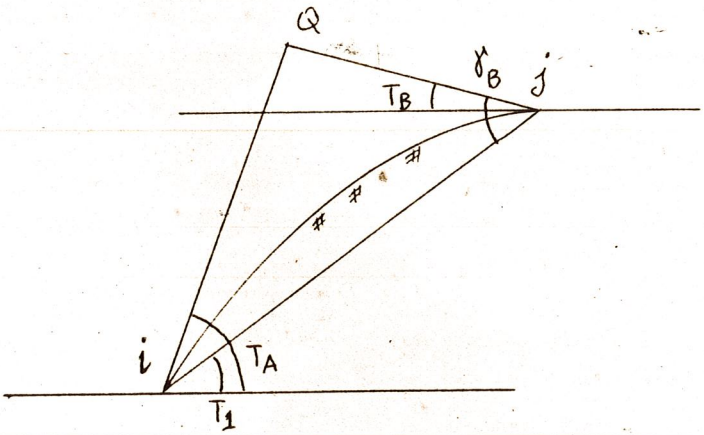
N – брой на изходните точки

M – брой на триъгълниците

TA,TB – наклон на тангентата при точка съответно при точка j, където $i,j \in \{1,2,3\}$.

T1 – наклон на хордата / отсечката / ;

GA,GB – ъгъл между тангентата на кривата и отсечка i-j при точка i, съответно при точка j / фиг. 4.15/



Фиг. 4.15

TN/, XT/, YT/, ZT/ – номера и координати на изходните точки;

T1%/, T2%/, T3%/ – машинни номера на върховете на триъгълниците;

H4/, H5/, ... , H9/ – височини на точките 4,5,..,9.

12. Модул / 12/

Наименование: PROF #

Предназначение: този модул се използува за извличане на надлъжни профили от базата за ЦМР при линейна интерполация. Профила може да е разположен в няколко блока.

А. Описание на променливите и масивите

CK – брой области, в които е разположен профила;

SP$/ – имена на областите

CS – брой на областите за един обект

CG$/ – имена на блоковете в дадена област

SR$/ – имена на блоковете на всички области

BP – брой на върховете на полигона на трасето

NP/, XP/, YP/, ZP/, RR/ – имена, координати и принадлежащите радиуси на кръговите криви. На точките от полигона на трасето

N – брой на изходните точки в блока, с който в момента програмата работи;

M – брой на точките от триъгълниците;

TN/, XT/, YT/, ZT/ – номера и координати на изходните точки в блока

DK – гъстота на подробните точки в профила

IL – брой на подробните точки в профила

XK/, YK/, ZK/ – координати на подробните точки в профила

SL/ – дължини по трасето от начална точка до подробните точки

Б. Подпрограми

1/ намиране на триъгълник – начална линия 5570

2/ изчисление на посочен ъгъл – начална линия 5250

3/ търсене на блок при дадени координати на една точка – начална линия 700

4/ образуване на списък от блокове – начална линия 6000

5/ извличане на профил при дадена кръгова крива – начална линия 1000

6/ извличане на профил при прав участък – начална линия 5290

7/ четене на изходни точки от блок – начална линия 8020

В резултат получаваме надлъжен профил с файла и списък на координатите и височини на подробните точки.

13. Модул / 13/

Наименование: PRF#

Предназначение: Този модул се използува за извличане на надлъжни профили от базата данни при нелинейна интерполация.

А. Описание на променливите и масивите.

В този модул се използуват имена на променливи и масиви, еднакви с тези от модул PROF# . Допълнително се използуват масивите

H1/, H2/ – височини на точките от кривата на Безе

Подпрограми

Еднакви с тези на модул PROF# . Използува се още подпрограма за определяне на височини на подробни точки чрез нелинейна интерполация – начална линия 9000.

В резултат получаваме надлъжен профил във файла и списък с координатите и височини на подробните точки.

14. Модул / 14

Наименование: GRPR#

Предназначение: графично изобразяване на надлъжен профил на екран.

А. Описание на променливите и масивите:

N – брой на подробните точки от профила

XT/ – разстояния от началната точка до дадена подробна точка

от съответния профил;

У Т/ - височини на подробните точки от профила

МА$/ - линеен мащаб за височините

Б. Подпрограма

Графичен текст - начална линия 10 000

4.4. Характеристика на програмните продукти

Програмните системи са написани на Бейсик и са реализирани на микрокомпютър " Правец - 82".

С оглед оптималното използуване на оперативната памет на " Правец - 82" се приема блокът на базата данни да не съдържа повече от 150 теренни точки, броят на подробните точки в един надлъжен профил да не надминава 300. При по-дълъг профил, той трябва да се разделя на отделни съставни части, евентуално с малко застъпване.

Използуването на програмните системи изискват средната конфигурация на персоналния микрокомпютър " Правец - 82 ".

1. Компутър с оперативна памет 48 К
2. Дисководи за 5.25 инча дискети / 1 или 2 броя/
3. Монитор
4. Принтер

4.5. Описание на входните данни и резултатите

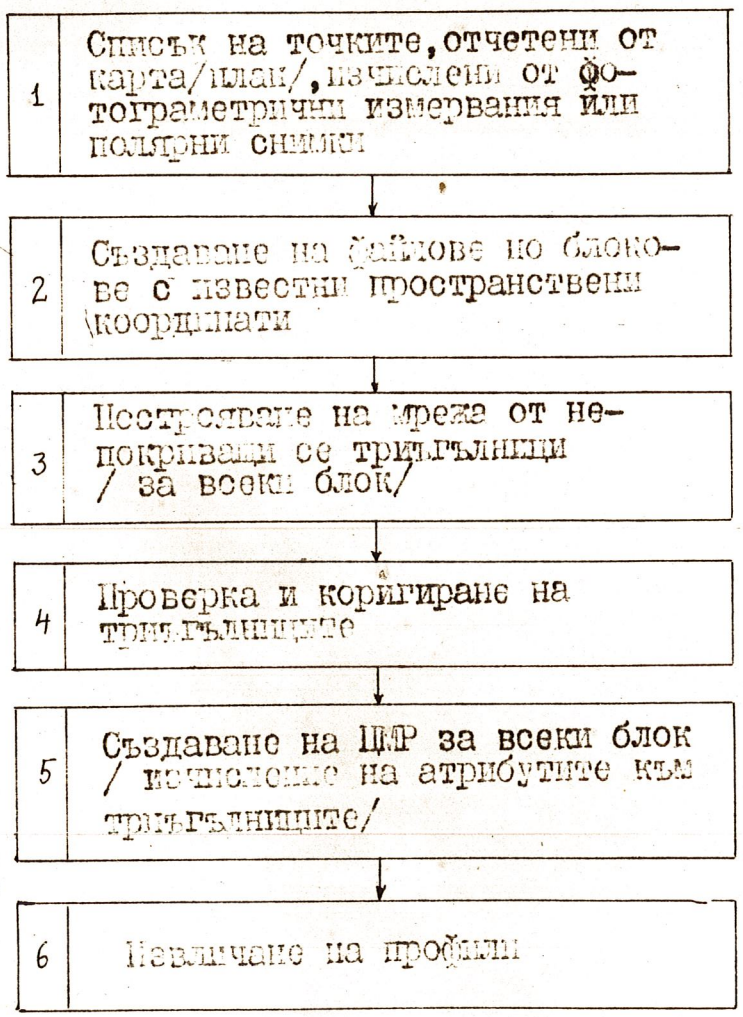
Началните данни, които са необходими за създаване на ЦМР са: списък от разпръснати точки, координати. Входните данни за извличане на надлъжен профил са: брой на точките от полигоните на трасето и радиусите на кривите. Ако при полигоновите точки на трасето нямат кръгови линии радиусите приемат нулеви стойности.

Крайните резултати от процеса на създаване на ЦМР са файловете на ЦМР по блокове, които образуват базата данни на ЦМР.

Крайните резултати от извличането на надлъжния профил са файлове от типа "NADL.PROF." , в който влизат разстояния от началната точка до дадена точка със съответна надморска височина. Освен това се получава графично представяне на надлъжния профил.

4.6. Функционална схема на програмните системи.

Функционалната схема на програмните системи за създаване на ЦМР и извличане на информация за надлъжните профили е показана на фиг. 4.16/


1
Списък на точките, отчетени от карта/план/, изчислени от фотограметрични измервания или полярни снимки
2
Създаване на файлове по блокове с известни пространствени координати
3
Построяване на мрежа от непокриващи се триъгълници / за всеки блок/
4
Проверка и коригиране на триъгълниците
5
Създаване на ЦМР за всеки блок / изчисление на атрибутите към триъгълниците/
6
Извличане на профили

Фиг. 4.16

4.7. Програмни системи за създаване на базата данни за ЦМР и извличане на профили - блок - схема

Програмната система при която се използува линейна интерполация се състои от една управляваща програма / меню/ и 11 работни модули.

Работни модули са:

- ZAPIS#1
- ЗАПИС СПИСЪК
- BAZ#
- ЧЕТЕНЕ СПИСЪК
- ЧЕТЕНЕ КАТАЛОГ
- F.TR#
- ЧЕРТЕЖ
- KKKRR#
- SMD#
- PROF#
- GRPR#

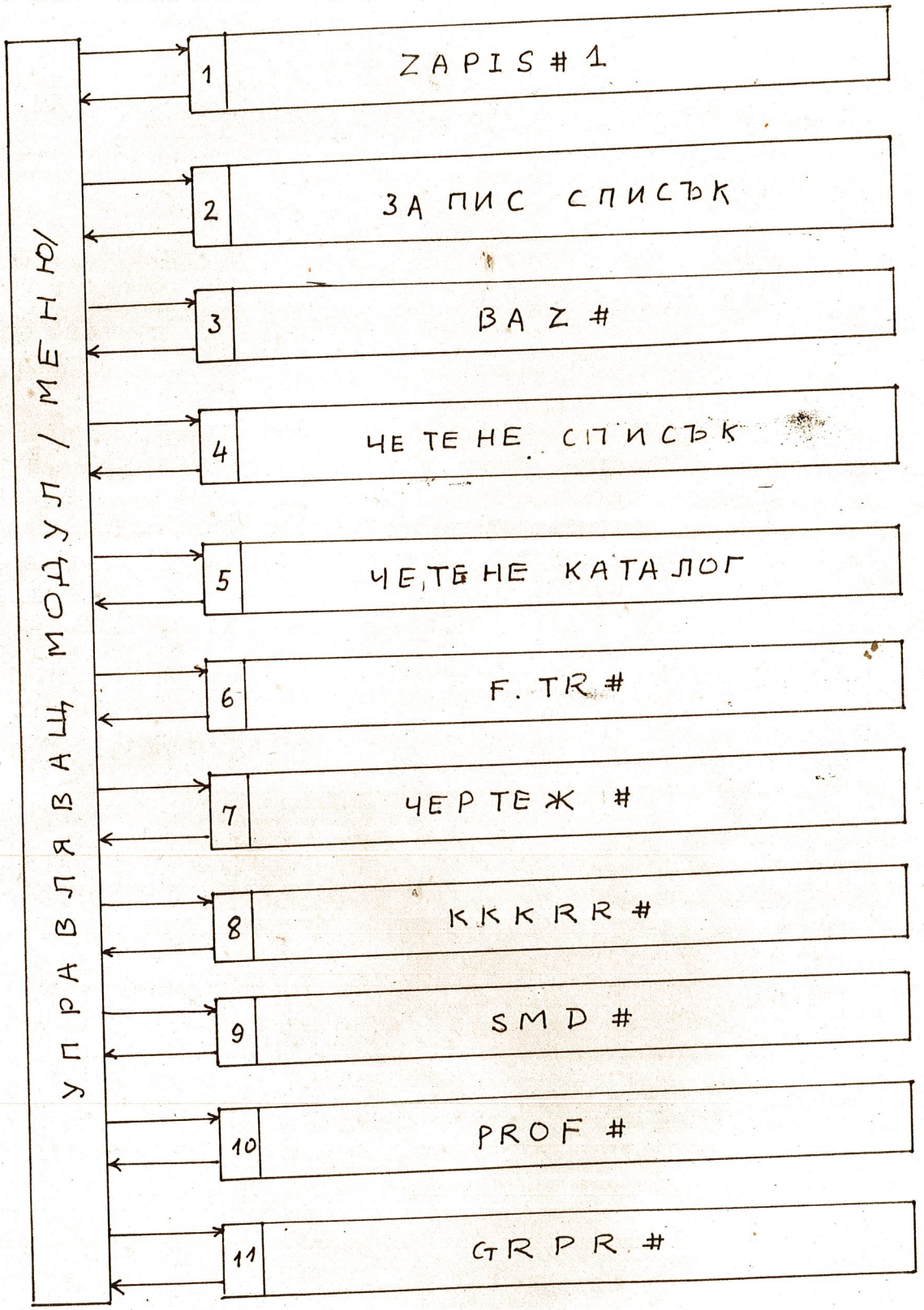
На фиг. 4.17 е показана блок-схемата на програмната програма.

Програмната система, при която се прилага нелинейна интерполация се състои от една управляваща програма и 12 работни модули, както следва:

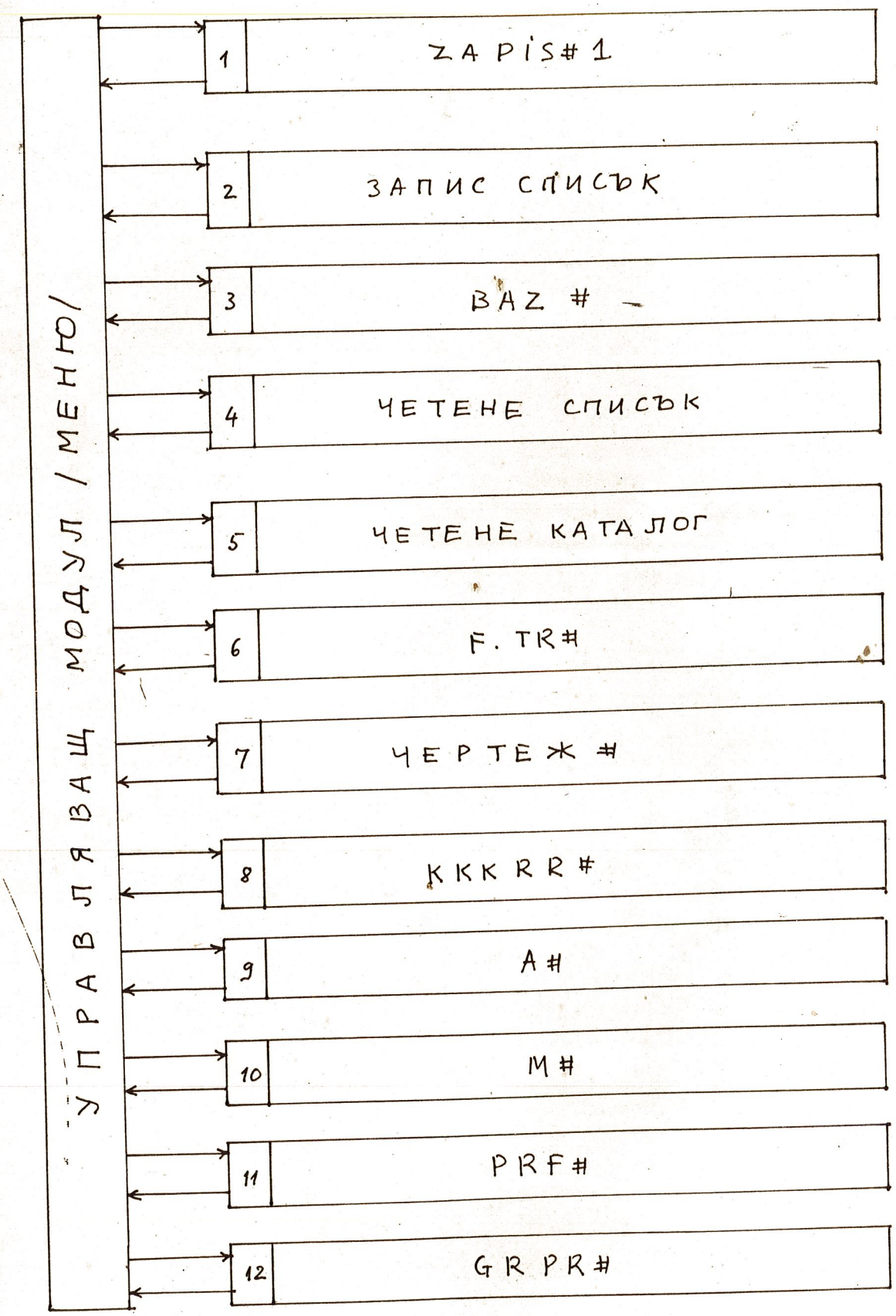
- ZAPIS#1
- ЗАПИС СПИСЪК
- BAZ#
- ЧЕТЕНЕ СПИСЪК
- ЧЕТЕНЕ КАТАЛОГ
- F.TR#
- ЧЕРТЕЖ

- KKKRR#
- A#
- M#
- PRF#
- GRPR#

На фиг. 4.18 е показана блок-схема на програмната система.


УПРАВЛЯВАЩ МОДУЛ / МЕНЮ/
1
ZAPIS # 1
2
ЗАПИС СПИСЪК
3
BAZ #
4
ЧЕТЕНЕ СПИСЪК
5
ЧЕТЕНЕ КАТАЛОГ
6
F. TR #
7
ЧЕРТЕЖ #
8
KKKRR #
9
SMD #
10
PROF #
11
GRPR #

Фиг.4.17


УПРАВЛЯВАЩ МОДУЛ /МЕНЮ/
1
ZAPIS#1
2
ЗАПИС СПИСЪК
3
BAZ #
4
ЧЕТЕНЕ СПИСЪК
5
ЧЕТЕНЕ КАТАЛОГ
6
F.TR#
7
ЧЕРТЕЖ #
8
KKKRR#
9
A#
10
M#
11
PRF#
12
GRPR#

Фиг.4.18

4.8. Числени примери

1. Върху топографски план в М 1:1000 и основно сечение 1 м са прокарани 2 профила и са отчетени височини на точки по профилите. Профилите от полигонови точки и разстояния между подробни точки D = 10 м.

Координати на полигонови точки са:

При първия профил:

1	920	1980
2	980	2020
3	880	2060
4	980	2090

При втория профил:

1	890	2010
2	860	2060
3	890	2130
4	870	2190

Чрез линейната програмна система е съставена базата данни за ЦМР /фиг. 4.19 /.Височини на подробните точки по профилите са определени чрез същата програмна система.В таблица 4.8.1 и таблица 4.8.2 със ΔH са означени разликите между височините по профилите на едни и същи подробните точки получени от програмната система и от отчитането от плана,т.е

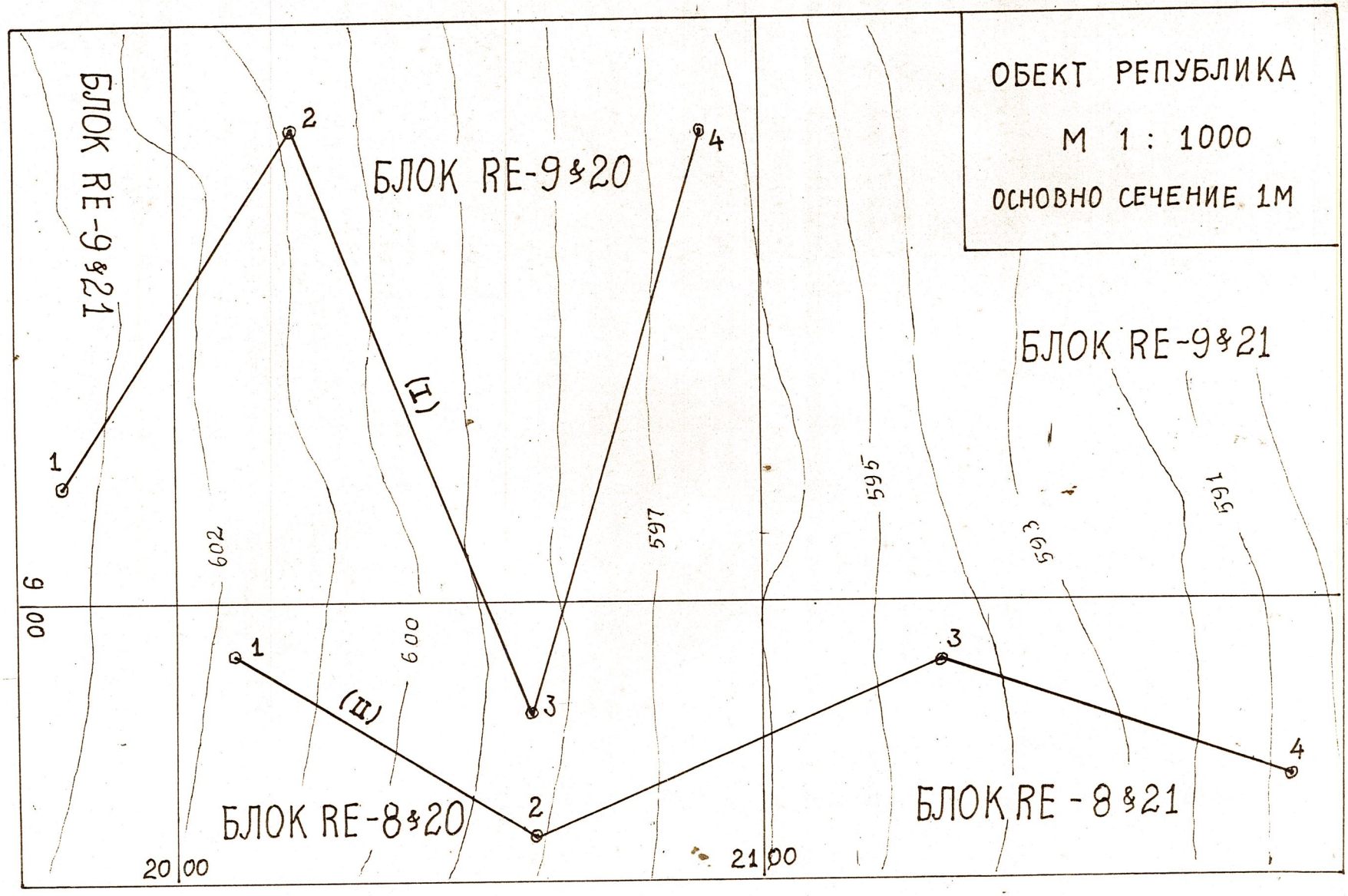
$$\Delta H = H^{изч.} - H^{пл.},$$

където $H^{изч.}$ се определят чрез програмната система,а $H^{пл.}$ са височини на същите точки,получени от отчитане от плана.

От получените разлики е изчислена средна квадратна разлика m_I за първия профил и m_{II} за втория профил и са определени:

$$m_I = \sqrt{\frac{[\Delta H_I^2]}{N_I}} = \sqrt{\frac{0,5181}{31}} = 0,13 \text{ м},$$

$$m_{II} = \sqrt{\frac{[\Delta H_{II}^2]}{N_{II}}} = \sqrt{\frac{0,1980}{22}} = 0,10 \text{ м}.$$


ОБЕКТ РЕПУБЛИКА
М 1 : 1000
ОСНОВНО СЕЧЕНИЕ 1М
БЛОК RE-9&21
БЛОК RE-9&20
БЛОК RE-9&21
БЛОК RE-8&20
БЛОК RE-8&21
(I)
(II)
1
2
3
4
602
600
597
595
593
591
9 00
20 00
21 00

Фиг. 4.19

Таблица 4.8.1

N	$H^{изч.}$	$H^{пл.}$	ΔH_I
1	603,61	3,5	0,11
2	603,15	3,1	0,05
3	602,85	2,8	0,05
4	602,54	2,4	0,14
5	602,22	2,1	0,12
6	601,78	1,8	0,08
7	601,37	1,4	-0,03
8	600,95	0,9	0,05
9	600,78	0,8	-0,02
10	600,60	0,6	0,00
11	600,52	0,4	0,12
12	601,03	0,2	-0,17
13	600,02	9,9	0,12
14	599,75	9,6	0,15
15	599,62	9,5	0,12
16	599,45	9,4	0,05
17	599,25	9,0	0,25
18	599,02	8,9	0,12
19	598,77	8,6	0,17
20	598,56	8,4	0,16
21	598,39	8,2	0,19
22	598,13	7,9	0,23
23	597,99	7,7	0,29
24	597,71	7,6	0,11
25	597,46	7,4	0,06
26	597,16	7,1	0,06
27	597,13	7,9	0,13
28	596,92	6,9	0,02
29	596,69	6,7	-0,11
30	596,61	6,6	0,01
31	596,58	6,5	0,08

Таблица 4.8.2

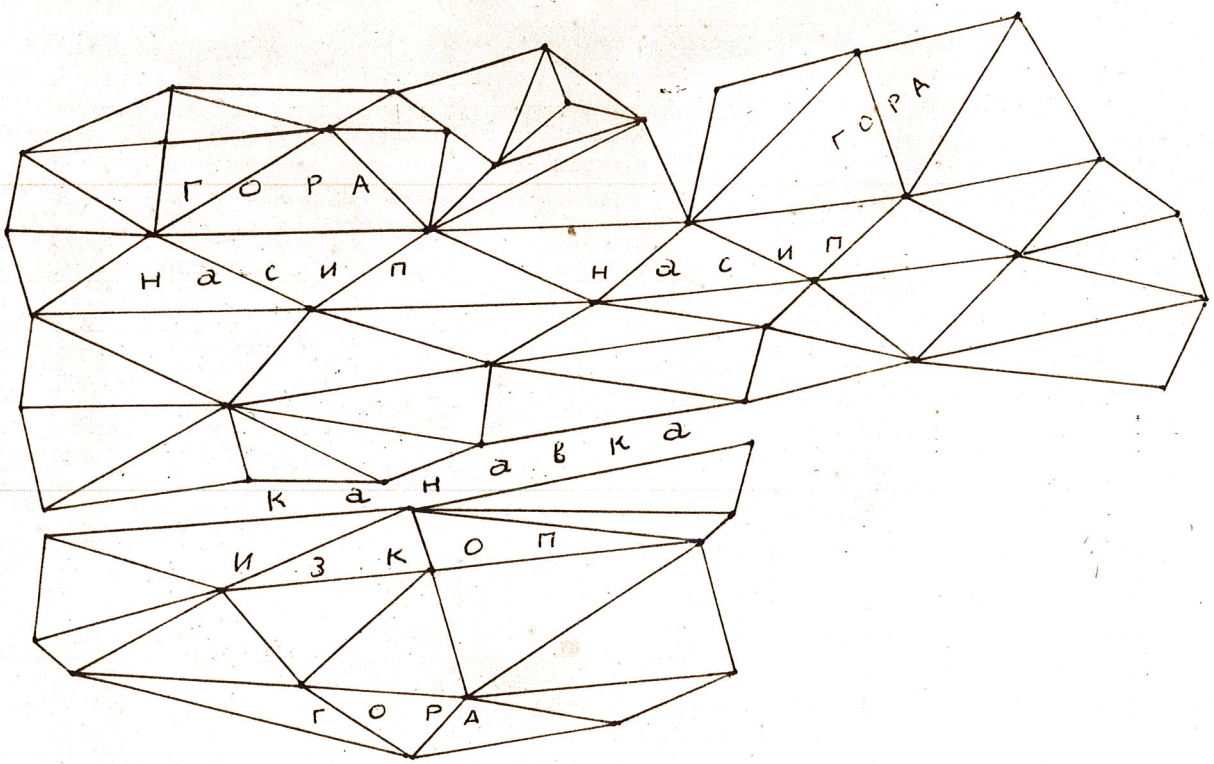
N	$H^{изч.}$	$H^{пл.}$	$\Delta H_{п}$
1	601,84	1,8	0,04
2	601,16	1,2	-0,04
3	600,63	0,7	-0,07
4	599,90	0,1	-0,12
5	599,27	9,4	-0,03
6	598,76	8,7	0,06
7	598,31	8,2	0,11
8	597,80	7,7	0,10
9	597,38	7,1	0,28
10	596,74	6,6	0,14
11	596,19	6,2	-0,01
12	595,66	5,7	-0,04
13	595,16	5,2	-0,04
14	594,67	4,6	0,07
15	594,37	4,4	-0,03
16	593,95	4,0	-0,05
17	593,53	3,6	-0,07
18	593,20	3,1	0,10
19	592,47	2,4	0,07
20	591,59	1,6	-0,01
21	590,88	0,9	-0,02
22	590,65	0,6	0,05

2. Върху чертежа на трасе в мащаб 1:200 и основно сечение 1 м изработен чрез ръчно нанасяне на подробните точки от тахиметрична снимка е прекарана квадратна мрежа със страна D =10 м и отчетени височини на възловите точки.

Чрез програмна система с нелинейната интерполация е съставена мрежа от непокриващи се триъгълници с оглед запазване на релефни форми.При това положение страните на триъгълниците следват терена и са целесъобразно разположени / фиг. 4.20 /.

В таблица 3.7.2 /колон 2/ са нанасени разликите $\Delta H_{кр} = H^{изч.} - H^{пл.}$, където $H^{изч}$ и $H^{пл}$ е височина на точки i определена чрез програмна система с нелинейната интерполация и от отчетена от чертежа.

От получените 55 разлики във възлови точки / табл. 3.7.2, колон 2 / е изчислена квадратна разлика и е определена $m_{h_{кр}} = 0,23$ м /виж. точка 3.7 /.



Фиг. 4.20

ГЛАВА ПЕТА

5.1. Точност на ЦМР

Гъстотата на точките, които моделират цифрово даден обект, пред определя и точността на модела. При графическите модели точността се определя от мащаба на образа.

Тъйкато при графическите модели с увеличаване на мащабното число се извършва генерализация на изобразения обект / територия/, така и при цифровите модели заедно с понижаване на изискванията за точност се прави генерализация, водеща до намаляване на броя на изходните точки на съответния модел. Тези обстоятелства създават ясно съответствие между цифровите и графическите модели.

Основата на ЦМР са височините и координатите на разпръснати точки, чиято точност и гъстота трябва да съответствува на този на картата в даден мащаб.

5.2. Зависимост между m_h и модула на вектора на градиента към модулната повърхнина на релефа

Теренната повърхност в модела е разбита на триъгълни повърхнини. Всяка триъгълна повърхнина може да се апроксимира чрез полином. Тогава уравнението на теренната повърхнина в околността на точка със зададени координати / X, У/ от триъгълник ijk въз основа на точка 2.1.5 има следния вид:

$$H(x,y) = H_P + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 + c_{12} xy, \quad / 5.2.1/$$

където $x = X - X_P, \; y = Y - Y_P$.

Вектора на направлението на най-големия наклон $\vec{\Gamma} = Grad\, H(x,y)$ се определя по формулата

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j}, \quad / 5.2.2/$$

където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единичните вектори на координатната система

/P; x,y/ с начало в точка P .

Тъй като

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{P/x=0,y=0/} = a_1 , \qquad / 5.2.3/$$

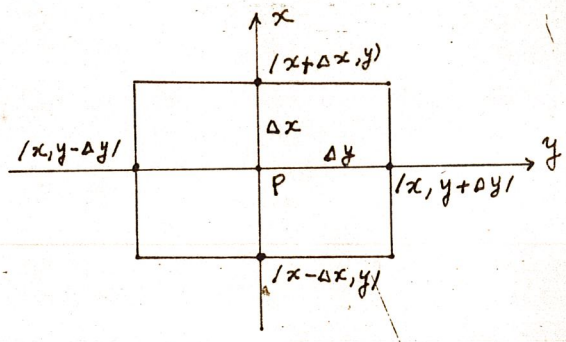
$$\left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{P/x=0,y=0/} = b_1 ,$$

за модула / големината/ на $\vec{\Gamma}$ ще имаме

$$\|\Gamma\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} . \qquad / 5.2.4/$$

Величината a_1 съгласно точка 2.1.5 е наклона на пресечницата между тангенциалната равнина в точка P и вертикалната равнина xPH . Аналогично b_1 е наклона на пресечницата между тангенциалната равнина в точка P и вертикална равнина yPH.

Да създадем локално поле във вътрешността на триъгълника във вид на правоъгълник с център точка P / фиг. 5.1/



Фиг. 5.1

Тогава величините a_1 и b_1 могат да се определят по формулите:

$$a_1 \approx \frac{H(x+\Delta x, y) - H(x-\Delta x, y)}{2\Delta x} , \qquad / 5.2.5/$$

$$b_1 \approx \frac{H(x, y+\Delta y) - H(x, y-\Delta y}{2\Delta y} . \qquad / 5.2.6/$$

При линейна интерполация точка P лежи в равнината на триъгълника

$$H = a + b x + c y . \qquad / 5.2.7/$$

Тогава имаме

$$a_1 = \frac{\partial H}{\partial x} = b,$$

$$b_1 = \frac{\partial H}{\partial y} = c, \qquad / 5.2.8/$$

$$\|\Gamma\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Да означим с m_h средната квадратна грешка на височината на определени точки от ЦМР. Нека изследваме зависимостта

$$m_{h_p} = f(\|\Gamma_p\|), \qquad / 5.2.9/$$

където $\|\Gamma_p\|$ се определя по формула / 5.2.4/

За целта постъпваме както следва:

- Изчисляват се $\Delta H_i = H_i^{изч.} - H^{пл.}$, където $H^{пл.}$ се отчитат от плана или картата, а $H^{изч.}$ се определят чрез програмните системи;

- Изчисляват се $\|\Gamma_p\|$ по формула / 5.2.4/ с оглед на / 5.2.5/ и / 5.2.6/ за нелинейната интерполация, а по формула / 5.2.8/ за линейната интерполация;

- Съставя се таблица със стойности $\|\Gamma_i\|$ и ΔH_i които се нанасят в координатната система $/0; \|\Gamma\|, \Delta H/$;

- Въз основа на получената графика се изчислява коефициента на корелация между ΔH_i и $\|\Gamma_i\|$ по МНМК и се изчертава регресионната крива.

Числени примери

Въз основа на данните от примерите в точка 3.7 чрез програми на Бейсик са изчислени стойностите $\|\Gamma_i\|$ и ΔH_i при точките, разстоянията между които са 10 м при тахиметричните снимки, а върху картата точките се намират близо до центровете на триъгълниците.

В таблица 5.1 са дадени стойностите на $\|\Gamma_i\|$ и ΔH_i. За случая на линейна интерполация, а на фиг. 5.1 са нанесени точките в координатната система $/0; \|\Gamma\|, \Delta H/$.

Търсим линейна корелационна връзка между m_h и модула на

градиента от вида

$$m_h = A + B\|\Gamma\|, \quad / 5.2.10/$$

където A и B са неизвестни коефициенти.

Въз основа на данните от таблица 5.1 са съставени уравненията на поправките във вида

$$v_i = A + B\|\Gamma_i\| - \Delta H_i, \quad / 5.2.11/$$

чрез които се получава нормалната система

$$164A + 27.666B - 31.780 = 0$$
$$27.666A + 8.874B - 6.775 = 0$$

От решение на системата се определят

$$A = 0.137$$
$$B = 0.335$$

Тогава зависимостта / 5.2.10/ се получава

$$m_h = 0,14 + 0,3\|\Gamma\|. \quad / 5.2.12/$$

В таблица 5.2 са дадени стойностите на $\|\Gamma_i\|$ и ΔH_i при нелинейна интерполация, а на фиг. 5.2 са нанесени съответните точки. И тук търсим линейна корелационна връзка между m_h и модула на градиента.

Задачата се решава аналогично на случая при линейна интерполация.

Нормалната система има вида

$$101A + 13.2683B - 18.27 = 0$$
$$13.2683A + 2.1982B - 2.5173 = 0$$

а за решението се получава

$$A = 0.147,$$
$$B = 0.2574,$$

откъдето за числения вид на зависимостта / 5.2.10/ се определя

$$m_h = 0,15 + 0,3\|\Gamma\|. \quad / 5.2.13/$$

Таблица 5.1

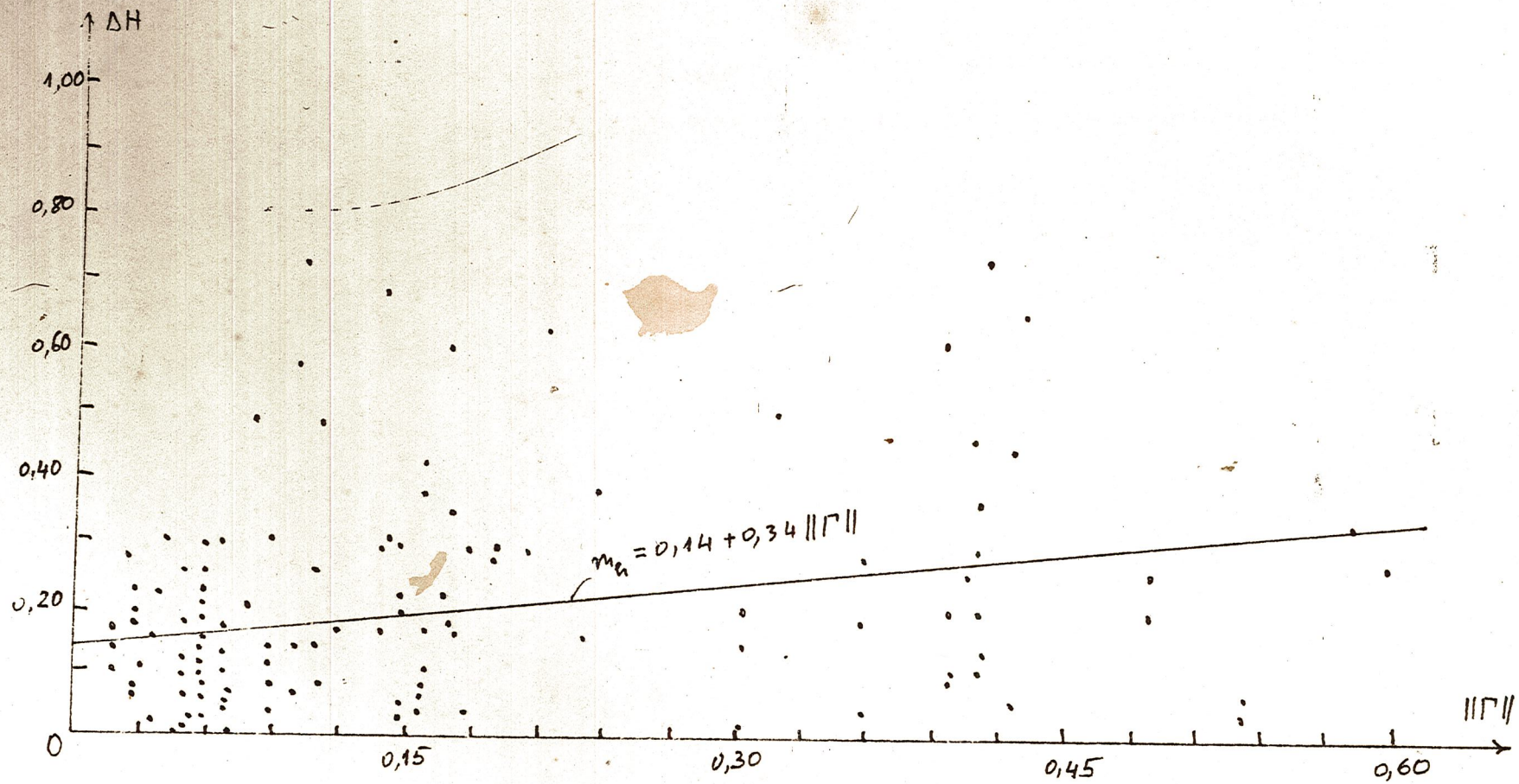
N	‖Г‖	Δ H	N	‖Г‖	Δ H
1	0,0541	0,01	28	0,0695	0,17
2	0,0541	0,02	29	0,0695	0,09
3	0,0628	0,15	30	0,0595	0,10
4	0,0630	0,18	31	0,0388	0,19
5	0,0642	0,22	32	0,0388	0,07
6	0,0642	0,14	33	0,0572	0,08
7	0,0642	0,20	34	0,0556	0,02
8	0,0828	0,20	35	0,0556	0,06
9	0,0828	0,49	36	0,0759	0,05
10	0,0635	0,08	37	0,0759	0,05
11	0,0503	0,11	38	0,0671	0,03
12	0,0551	0,00	39	0,0671	0,11
13	0,0575	0,06	40	0,0761	0,17
14	0,0666	0,18	41	0,0724	0,04
15	0,0630	0,21	42	0,0372	0,17
16	0,0663	0,21	43	0,0777	0,00
17	0,0663	0,25	44	0,0569	0,11
18	0,0663	0,29	45	0,0699	0,11
19	0,0731	0,00	46	0,0658	0,12
20	0,0731	0,12	47	0,0741	0,01
21	0,0392	0,22	48	0,1062	0,14
22	0,0572	0,05	49	0,0705	0,03
23	0,0572	0,11	50	0,0705	0,06
24	0,0587	0,17	51	0,0637	0,01
25	0,0666	0,22	52	0,0637	0,15
26	0,0630	0,08	53	0,0372	0,19
27	0,0695	0,16	54	0,1176	0,08

Продължение от табл. 5.1

N	‖Γ‖	Δ H	N	‖Γ‖	Δ H
55	0,0865	0,10	82	0,4289	0,65
56	0,0205	0,28	83	0,4289	0,84
57	0,1187	0,75	84	0,4289	0,64
58	0,1187	0,25	85	0,0232	0,10
59	0,0650	0,12	86	0,0232	0,12
60	0,0636	0,17	87	0,0232	0,16
61	0,0636	0,13	88	0,0497	0,15
62	0,0707	0,14	89	0,0343	0,10
63	0,3600	0,04	90	0,0343	0,04
64	0,3600	0,26	91	0,0409	0,01
65	0,3633	0,17	92	0,0409	0,21
66	0,0401	0,10	93	0,0409	0,30
67	0,0401	0,62	94	0,1061	0,08
68	0,4056	0,27	95	0,1061	0,14
69	0,4065	0,36	96	0,0925	0,13
70	0,4065	0,45	97	0,0925	0,11
71	0,4057	0,73	98	0,0934	0,08
72	0,7904	0,14	99	0,0959	0,04
73	0,7386	0,33	100	0,0959	0,04
74	0,7386	0,07	101	0,0894	0,03
75	0,4001	0,09	102	0,0894	0,16
76	0,4056	0,01	103	0,0241	0,12
77	0,4056	0,10	104	0,1887	0,01
78	0,4065	0,12	105	0,3047	0,19
79	0,0232	0,00	106	0,3047	0,14
80	0,4289	0,05	107	0,4061	0,25
81	0,4289	0,45	108	0,4061	0,19

Продължение от табл. 5.1

N	$\|\Gamma\|$	Δ H	N	$\|\Gamma\|$	Δ H
109	0,4917	0,25	137	0,1523	0,05
110	0,4917	0,18	138	0,1493	0,30
111	0,5331	0,03	139	0,2466	0,38
112	0,5331	0,07	140	0,1492	0,68
113	0,5964	0,25	141	0,3115	0,02
114	0,5804	0,32	142	0,3290	0,58
115	0,1113	0,07	143	0,3290	0,00
116	0,0536	0,02	144	0,2331	0,15
117	0,0536	0,08	145	0,1900	0,27
118	0,0682	0,01	146	0,1908	0,29
119	0,1232	0,26	147	0,1782	0,35
120	0,0215	0,09	148	0,1673	0,42
121	0,0215	0,11	149	0,1130	0,47
122	0,0713	0,06	150	0,2993	0,74
123	0,0567	0,07	151	0,1405	0,16
124	0,0567	0,25	152	0,1679	0,10
125	0,0952	0,06	153	0,1640	0,37
126	0,1978	0,70	154	0,1443	0,19
127	0,2581	0,06	155	0,1729	0,59
128	0,1805	0,04	156	0,1487	0,29
129	0,1639	0,07	157	0,1618	0,21
130	0,1554	0,02	158	0,1609	0,21
131	0,1664	0,04	159	0,2509	0,92
132	0,1204	0,16	160	0,2224	0,63
133	0,1080	0,06	161	0,1708	0,17
134	0,0946	0,30	162	0,1543	0,21
135	0,1821	0,29	163	0,1148	0,73
136	0,1789	0,16	164	0,2091	0,28



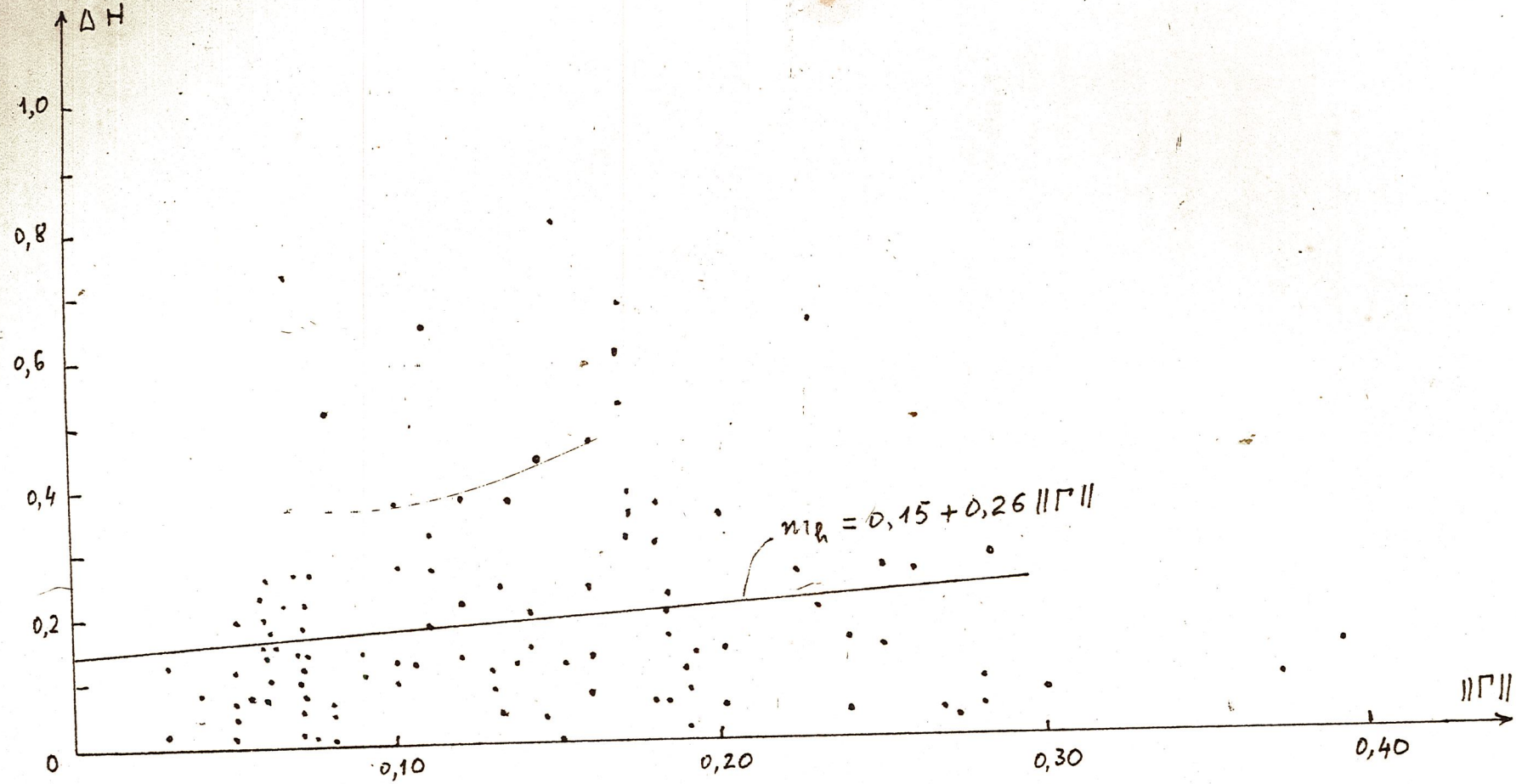
Фиг. 5.1

Таблица 5.2

N	$\|\|\Gamma\|\|$	ΔH	N	$\|\|\Gamma\|\|$	ΔH
1	0,0949	0,14	26	0,1747	0,35
2	0,1067	0,65	27	0,1818	0,30
3	0,2495	0,14	28	0,1453	0,04
4	0,1976	0,13	29	0,1658	0,60
5	0,1709	0,00	30	0,1444	0,44
6	0,1755	0,06	31	0,1872	0,23
7	0,1551	0,00	32	0,1642	0,24
8	0,1195	0,39	33	0,2304	0,65
9	0,1142	0,17	34	0,1716	0,52
10	0,1022	0,27	35	0,1330	0,05
11	0,1369	0,38	36	0,1857	0,20
12	0,1911	0,11	37	0,5677	0,01
13	0,1625	0,13	38	0,5622	0,01
14	0,1714	0,39	39	0,5180	0,09
15	0,1971	0,35	40	0,4838	0,26
16	0,2381	0,15	41	0,3750	0,09
17	0,2845	0,29	42	0,3943	0,13
18	0,2288	0,20	43	0,4079	0,37
19	0,2436	0,04	44	0,0382	0,02
20	0,1736	0,31	45	0,0787	0,09
21	0,1800	0,37	46	0,1424	0,20
22	0,1691	0,68	47	0,1411	0,12
23	0,1604	0,47	48	0,1429	0,13
24	0,1207	0,21	49	0,1670	0,06
25	0,1884	0,08	50	0,1921	0,13

Продължение от табл. 5.2

N	$\|\|\Gamma\|\|$	ΔH	N	$\|\|\Gamma\|\|$	ΔH
51	0,1981	0,01	77	0,0915	0,11
52	0,1825	0,05	78	0,0616	0,27
53	0,1821	0,16	79	0,0452	0,08
54	0,2088	0,05	80	0,0572	0,05
55	0,2050	0,05	81	0,0580	0,07
56	0,2236	0,26	82	0,0567	0,11
57	0,2578	0,25	83	0,0662	0,10
58	0,2843	0,04	84	0,0667	0,23
59	0,2803	0,07	85	0,0647	0,27
60	0,2675	0,03	86	0,0726	0,28
61	0,2756	0,04	87	0,0693	0,24
62	0,3093	0,06	88	0,0736	0,00
63	0,1358	0,11	89	0,0660	0,21
64	0,1341	0,24	90	0,0809	0,05
65	0,1139	0,27	91	0,0614	0,08
66	0,1027	0,39	92	0,0701	0,08
67	0,1365	0,09	93	0,0814	0,00
68	0,1154	0,13	94	0,0747	0,08
69	0,1595	0,13	95	0,0661	0,15
70	0,0590	0,02	96	0,0719	0,10
71	0,0584	0,05	97	0,0710	0,11
72	0,0607	0,15	98	0,0711	0,02
73	0,0640	0,16	99	0,0602	0,19
74	0,0656	0,22	100	0,1052	0,12
75	0,0649	0,15	101	0,0568	0,20
76	0,0769	0,20			



Фиг. 5.2

Сравнението между / 5.2.12/ и / 5.2.13/ за конкретния пример показва, че двата похода на интерполация водят до идентични резултати.

Понеже липсват на данни за различни категории на релефа при различни видове на измервания, зависимост / 5.29/ в пълния вид още не можем да изведем. В числения пример приемаме линейната зависимост / 5.2.10/ въз основа на формула на Копе [27]

$$m_{h_{max}} = 0,25 + 1,5\,tg\,\gamma, \qquad / 5.2.14/$$

където γ е ъгълът на наклона на релефа.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Основните резултати на дисертационната работа, имащи научно и приложно значение могат да се обощат в следното:

1. Въз основа на анализ на литературни източници се стига до извода, че подходящо прилагането на метода на крайните елементи за изграждане на ЦМР. При това използуването на триъгълните елементи е най-ефективно- точка 1.2 и точка 3.1.

2. Установено е, че при достатъчна гъстота и целесъобразно местоположение на точките, при условие, че страните на триъгълниците следват терена, точността на ЦМР при нелинейната интерполация не е по-голяма от тази при линейната интерполация - точка 3.7.

3. Предложен е начин за изграждане на мрежа от непокриващи се триъгълници. При този точките са разположени на непресичащи се профили - точка 3.3.

4. Предложен е начин за изграждане на база от данни за ЦМР при наличие на мрежа от непокриващи се триъгълници - точка 3.2.

5. Предложен е начин за апроксимация на теренните гранични линии на триъгълните елементи - точка 3.4.2.

6. Изведена е формула /3.5.14/ съответно / 3.5.17/ за интерполиране на триъгълния елемент при зададени дискретни точки на тангентите на граничните му линии - точка 3.5.

7. Предложен е начин за изследване на точността на ЦМР - точка 5.2.

8. Разработени са две програмни системи на Бейсик за създаване на базата от данни за ЦМР и извличане на профили на микрокомпютърът " Правец - 82" - точка 4.1 до точка 4.7.

Б Л А Г О Д А Р Н О С Т

Аспирантът счита за свой дълг да изкаже своята най-искрена благодарност и дълбока признателност на ръководителите си проф. д.т.н. инж. Г.Златанов,доц. к.т.н. инж. П.Томова за напътствие при разработване на темата,както и за грижа на аспиранта,на доц. к.т.н. инж. Б.Банов за консултаците,за ценната литература предоставена на разположение на аспиранта.

15.IX.1986 год.

С О Ф И Я

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баканова, В.В. Крупномастабные топографические съемки., " Недра", М., 1983.

2. Банов, Б. Емпиричен метод за интерполиране на хоризонтали. Сп. " Геодезия, картография и земеустройство", С., кн. 2, 1986.

3. Бесънт, К. Машинната графика в автоматизацията на проектирането и производство, " Техника" ,С., 1984.

4. Бойко, А.В. Методы и средства автоматизации топографских съемок, " Недра", М., 1980.

5. Бойко, А.В., Л.Я. Лимонтов, Е.Я. Мительман. Аналитическое построение горизонталей по цифровым моделям на база ЭВМ и автоматического координатографа " Картимат - III" Геодезия и картография", М., 1974, № 3.

6. Боядшиев, А. Числени методи и програмиране, " Техника",С.,1976.

7. Гигой, В. Интеративная машинная графика, " Мир", М., 1981.

8. Демидович, Б.П., М.А. Марон, Э.З. Шувалова. Численные методы анализа., " Физико-математическая литература". М., 1962.

9. Зафиров, П. и др. Интеративна графична система за редактиране и актуализиране на цифрови модели на местността. Втори международен симпозиум по дигитална топографска картография, Пловдив, 1985.

10. Зафиров, П. Фотограметрични технологии и технически средства за дигитално картиране. Втори международен симпозиум по дигитална топографска картография, Пловдив, 1985.

11. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике, " Мир,"М.,1985

12. Зинзбург, В.И. Модель релеф для проектирования и составления планов, " Геодезия и картография", М, 1977, № 4

13. Златанов, Г. ЦМР - Една нова концепция. Втори международен симпозиум по дигитална топографска картография, Пловдив, 1985.

14. Златанов, Г. Електронно-изчислителна техника в геодезията.

15. Лобанов, А.Н. Фотограметрия, " Недра", М., 1983.

16. Мандраков, М. и др. Изграждане и съдържание на маркшайдерска информационна база на открит рудник. Втори международен симпозиум по дигитална топографска картография, Пловдив, 1985.

17. Мартэен, А. Базы данных. Практические методы. " Радио и связь" М., 1983.

18. Малявский, Б.К., А.А. Жарновский. О цифровом моделировании релефа местности. " Геодезия и картография", М., 1974, № 6

19. Махлин, С.Г. Вариационные методы в математической физики. "Технико-теоретическая литература", М, 1957.

20. Матчелл, Э., Р. Уэит. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными., " Мир", М., 1981.

21. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций. " Технико-теоретическая литература", М., 1949

22. Неумывакин, А.Ю, А.Ф. Яковлев. О построении структурно-цифровой модели релефа, М., " Геодезия и картография", М., 1986, № 2.

23. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике. " Мир", М., 1985.

24. Роджерс, Д., Дж. Адамс. Математические основы машинной графики. " Машиностроение". М., 1980.

25. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов., "Мир", М., 1979.

26. Сердюков, В.М. Фотограметрия", " Висшая школа", М., 1983.

27. Стойчев, Д., В. Куртев, Ст. Атанасов. Геодезия II ч. " Техника", С., 1982.

28. Фокс, А., М. Пратт. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. "Мир", М. 1982.

29. Трендафилов. Т. Същност и особености на информационната база на числените модели на релефа и инженерната инфраструктура при използуването им в интеративни системи. Втори международен симпозиум по дигитална топографска картография, Пловдив, 1985.

30. Хайдушки, И., П. Зафиров. Ръководство за упражнения по фотограметрия, " Техника", С., 1976.

31. Элькин, С.Б., В.Н. Горбушин. Цифровая модель релефа местности и ее структура. " Геодезия и картография", М., 1974, № 7.

32. Ягодина, Л.Л. Моделирование поля релефа с помощью ортогональных полиномов Чебышева. Вест. Ленинград, университета, 1972, № 24

33. Янков, Б., М. Аврамов. Бейсик за микрокомпютри, " Техника", С., 1986.

34. Koch, K. R. Digitales GELANDE modell und automatische Hohenlnienzeichnung," Zeitschrift fur Vermessungswesen", 1973, 98, N8

35. Koch, K.R. Digitales Modell und Isolinienzeichnung für Zwecke der Ingenieuzr - Vermessung und der Topographie," Vermessungswesen und Raumordnung", 1975, 37, N1,

36. Silar;F. Das digitale Gelande Modell - Theorie und Praxis; "Vermessungtechnik"; I972; 20; N9.

37. Sima; J. Prinzipen des CS digitalen Gelandemodll; " Vermessungstechnik"; I972; N2.

38. Hardy;R. L. Least squares Prediction; " Photogramm. Eng. and Remote sens"; I977; 43; N4.

39. Hardy; R. L. Research results in the application of multiquadric equations to sureying and mapping problem; " Sureying and mapping"; I975; 35; N4.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

Глава първа

Увод 2

1.1. Типове ЦМР 3

1.1.1. Модели, неотчинащи структурата на релефа 4

1.1.2. Модели, частично отчитащи структурата на релефа 6

1.1.3. Модели, отчитащи структурата на релефа 9

1.2. Критически бележки върху съществуващи решения. Тема на дисертацията 11

Глава втора

2.1. Сведения за криви и повърхнини в тримерно пространство 13

2.1.1. Параметрично описание на криви и повърхнини 13

2.1.2. Полином на Бернщайн - Безе 14

2.1.3. Крива на Безе 15

2.1.4. Елемент от повърхнина на Безе 18

2.1.5. Уравнение на теренна повърхнина в околността на зададена точка 20

2.2. Детерминанти и - координати 22

2.3. Триъгълен елемент, интерполиран чрез равнина 26

2.4. Триъгълен елемент, интерполиран с полином от по висока степен 29

2.5. Ермитова интерполация на триъгълен елемент 33

Глава трета

3.1. Цифров модел на релефа - концепия 35

3.2. Структура на базата данни за ЦМР 41

3.3. Начин за построяване на мрежа от непокриващи се триъгълници 44

3.4. Определяне вида на теренните граничните линии на триъгълен елемент 46

3.4.1. Определяне на наклона на тангентите T_1 и T_2 47
3.4.2. Определяне на вида на граничните линии на триъгълен елемент 47
3.4.3. Определяне на $D_{доп.}$ за теренната линия 50
3.5. Интерполационна функция определена от дискретни точки по тангентите на граничните линии на триъгълен елемент 51
3.6. Сгъстяване на триъгълните елементи 55
3.7. Числени примери 58
Глава четвърта
4.1. Програмна система за създаване на базата данни за ЦМР и извличане на профили чрез линейната интерполация - аналитично решение 70
4.2. Програмна система за създаване на базата данни за ЦМР и извличане на профили чрез нелинейната интерполация - аналитично решение 77
4.3. Описание на подпрограми , които се ползуват в програмните системи 87
4.4. Характеристика на програмните продукти 97
4.5. Описание на входните данни и резултатите 97
4.6. Функционална схема на програмните системи 98
4.7. Програмни системи за създаване на базата данни за ЦМР и извличане на профили - блок схема 99
4.8. Числени примери 103
Глава пета
5.1. Точност на ЦМР 108
5.2. Зависимост между и модула на вектора на градиента към моделната повърхнина на релефа 108
Заключение 120
Литература 122